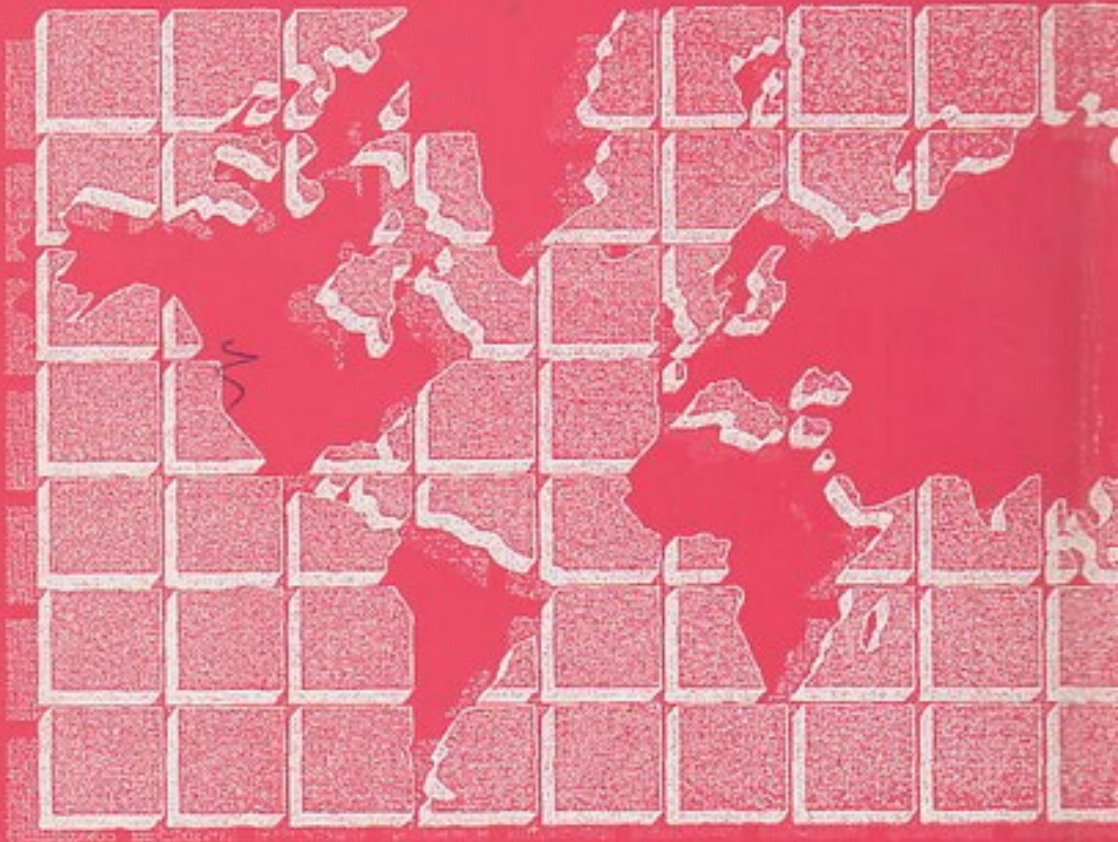




POWEREN.IR

ریاضیات مهندسی



دکتر عبدالله شیدفر



ریاضیات مهندسی

سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه
معادلات با مشتقات جزئی
توابع مختلط

۹۳۳۱۱۴

عبداله شید فر
استاد دانشگاه علم و صنعت ایران

سرشناسه	: شیدفر، عبدالله، ۱۳۱۹-
عنوان و پدیدآور	: ریاضیات مهندسی: سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه معادلات با مشتقات جزئی، توابع مختلط / عبدالله شیدفر.
مشخصات نشر	: [تهران]: دالفک، ۱۳۷۵.
مشخصات ظاهری	: ۲۷۲ ص: مصور، جدول، نمودار.
شابک	: ۸۰۰۰ ریال؛ ۹۰۰۰ ریال: X-۰۶-۰۲۲۶-۰۶۴ چاپ دوم؛ ۴۵۰۰۰ ریال: چاپ دوازدهم: ۳-۰۴-۰۶۲۲۶-۰۶۴؛ ۳۰۰۰۰ ریال (چاپ دهم)؛ ۱۲۰۰۰ ریال (چاپ ششم)
یادداشت	: پشت جلد به انگلیسی: A. Shidfar: Engineering mathematics
یادداشت	: کتاب حاضر قبلاً با عنوان "ریاضی مهندسی" در دو جلد توسط مؤلف در سال ۱۳۷۴ منتشر گردیده. جلد اول آن نیز جداگانه با عنوان "معادلات دیفرانسیل" به چاپ رسیده است و این کتاب جلد دوم کتاب "ریاضی مهندسی" است.
یادداشت	: چاپ دوم: ۱۳۷۸
یادداشت	: چاپ ششم: اسفند ۱۳۷۸.
یادداشت	: چاپ دهم: ۱۳۸۴
یادداشت	: چاپ دوازدهم: ۱۳۸۶ (فیبیا).
یادداشت	: کتابنامه: ص. ۲۶۲-۲۶۳.
عنوان دیگر	: ریاضی مهندسی.
موضوع	: ریاضیات مهندسی.
رده بندی کنگره	: ۹ ر ۹ ش / TA ۳۳۰
رده بندی دیودی	: ۶۲۰/۰۰۱۵۱
شماره کتابخانه ملی	: ۱۲۵-۷۶ م

نام کتاب: ریاضیات مهندسی

تألیف: عبدالله شیدفر

ویراستاران: آقایان مهندس عادل دانش و فرهاد بهمنی

ناشر: انتشارات دالفک

طرح روی جلد: آقای همایون کوچک زاده

ترسیم اشکال: آقای علی حسینی راد

چاپ دوازدهم: ۱۳۸۶

شمارگان: ۵۰۰۰ جلد

قیمت: ۴۵۰۰۰ ریال

حروفچینی و صفحه آرایی: خانم مهدیه السادات باقری و آقای کمال انوری پور

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مرکز انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران

ISBN: ۹۶۴-۰۲۲۶-۰۴-۳

شابک: ۹۶۴-۰۲۲۶-۰۴-۳

کلیه حقوق برای ناشر محفوظ و هر گونه تکثیر و نوشتن حل المسائل برای این کتاب بدون اجازه کتبی از مؤلف ممنوع می باشد و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار خواهند گرفت.



تقدیم به همسر و فرزندانم



مقدمه مؤلف

هدف این کتاب ارائه قسمتهایی از ریاضیات است که در بخشهای گوناگون فیزیک و مهندسی کاربرد دارند. کتاب طوری تنظیم شده است که همه جنبه‌های اساسی موضوع چه از نظر کاربردی و چه از نظر تئوری را در بر بگیرد و در ضمن طوری نباشد که خواننده را خسته کند. در انتهای هر فصل مسائل حل شده ارائه شده‌اند و این مسائل طوری تنظیم شده‌اند که حل مسائل ساده تا پیچیده هر بخش را در بر بگیرند. در تألیف این کتاب مؤلف حاصل سالها تجربه خود در امر تدریس ریاضیات مهندسی، معادلات با مشتقات جزئی و توابع مختلط به دانشجویان مهندسی و فیزیک و ریاضی را جمع‌آوری کرده است.

تنها پیشنهاد برای مطالعه این کتاب یک دوره کامل از حساب دیفرانسیل و انتگرال و معادلات دیفرانسیل معمولی است.

برای تهیه این اثر با حداقل اشکالات تلاشهای زیادی شده است که در اینجا بر خود لازم می‌داند که از آقای همایون کوچک‌زاده به جهت هم‌آهنگ کردن امکانات تایپ و از آقایان مهندس کمال پاشا دادرس و محسن جباری به جهت مطالعه آخرین نسخه تایپ شده و مطابقت آن با متن تشکر کند. همچنین از همه کسانی که در امر ویراستاری و حروفچینی و چاپ، اینجانب را یاری داده‌اند تشکر می‌شود. نهایتاً از همه عزیزانی که به مطالعه این اثر می‌پردازند خواهشمند است برای بهتر ساختن این کتاب اینجانب را یاری دهند و اشکالات موجود در این اثر و هرگونه پیشنهاد برای بهتر نمودن آن را به اطلاع مؤلف برسانند.

عبداله شیدفر

استاد کامل دانشگاه علم و صنعت ایران

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل اول: سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

۱	۱.۱. سریهای فوریه
۲۴	۲.۱. سری فوریه دوگانه
۲۷	۳.۱. انتگرال فوریه
۳۱	۴.۱. صورت مختلط سری و انتگرال فوریه
۳۶	۵.۱. تبدیلات فوریه
۴۱	۶.۱. مسائل حل شده
۵۵	۷.۱. تمرینات
۶۵	۸.۱. تمرینات متفرقه

فصل دوم: معادلات با مشتقات جزئی

۶۹	۱.۲. مقدمه
۷۱	۲.۲. تمرینات
۷۲	۳.۲. مسائل با مقادیر اولیه و کرانه‌ای
۸۷	۴.۲. حل دالامبر معادله موج
۹۱	۵.۲. تمرینات
۹۴	۶.۲. مسئله گرما

۹۹	۷.۲. تمرینات
۱۰۰	۸.۲. مسئله انتقال حرارت برای یک میله با طول نامتناهی
۱۰۳	۹.۲. تمرینات
۱۰۴	۱۰.۲. حل مسئله موج در فضای دوبعدی
۱۰۷	۱۱.۲. تمرینات
۱۰۸	۱۲.۲. حل معادلات لاپلاس و پواسن
۱۱۵	۱۳.۲. حل مسئله لاپلاس برای یک کره
۱۱۸	۱۴.۲. حل مسئله ارتعاش یک ناحیه مستدیر
۱۲۰	۱۵.۲. حل مسائل معادلات با مشتقات جزئی به کمک تبدیلات فوریه و تبدیلات لاپلاس
۱۲۶	۱۶.۲. مسائل حل شده
۱۳۹	۱۷.۲. تمرینات متفرقه

فصل سوم: توابع مختلط

۱۴۹	۱.۳. اعداد مختلط
۱۵۲	۲.۳. تمرینات
۱۵۳	۳.۳. نواحی در صفحه مختلط
۱۵۴	۴.۳. توابع مختلط
۱۶۰	۵.۳. توابع همساز
۱۶۱	۶.۳. مسائل حل شده
۱۶۴	۷.۳. تمرینات
۱۶۵	۸.۳. برخی توابع مقدماتی، نگاشتهای همدیس
۱۸۳	۹.۳. مسائل حل شده

۱۸۸

۱۰۳. تمرینات

فصل چهارم: انتگرالگیری از توابع مختلط

۱۹۳

۱.۱.۴. انتگرالگیری روی خط در صفحه مختلط

۱۹۶

۲.۴. برخی دیگر از خواص انتگرال روی خط مختلط

۲۱۰

۳.۴. سریهای توانی، سریهای تیلور و لوران

۲۲۳

۴.۴. محاسبه مقادیر مانده‌ها

۲۲۶

۵.۴. محاسبه انتگرالهای حقیقی به کمک انتگرالگیری به روش مختلط

۲۳۷

۶.۴. مسائل حل شده

۲۴۱

۷.۴. تمرینات

۲۴۸

۸.۴. مسائل متفرقه

۲۶۲

مراجع

۲۶۴. جدولهای تبدیلات کسینوس فوریه، تبدیلات سینوسی فوریه و تبدیلات فوریه



فصل اول

سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

۱.۱. سریهای فوریه

یکی از ابزار پر قدرت در حل مسائل ریاضیات کاربردی همچون حل مسائل معادلات با مشتقات جزئی نمایش توابع به صورت یک سری فوریه است. سری فوریه، یک سری مثلثاتی، مثلاً به صورت:

$$a_0 + (a_1 \cos \alpha_1 x + b_1 \sin \beta_1 x) + (a_2 \cos \alpha_2 x + b_2 \sin \beta_2 x) + \dots$$

است که در آن ضرایب a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 و غیره به روش خاصی محاسبه می‌شوند. ما بنا نداریم که یک بحث تئوری قوی در مورد سریهای فوریه را در اینجا پایه ریزی کنیم بلکه مایل هستیم تا آنجا با مسائل مربوط به آن درگیر شویم که نیازهای کاربردی ما را در بحثهای آینده برآورده کند و در ضمن ارائه مسائل متنوع بحثهای جالبی از نظر تئوری تا حد نیاز برای آشنائی با مطالب نظری ارائه خواهیم کرد. برای وارد شدن به بحث مربوط به سری فوریه تابع $y=f(x)$ با دوره تناوب $p=2l$ را در نظر می‌گیریم و بنا داریم این تابع را به صورت سری مثلثاتی

$$f(x) = \frac{1}{p} a_0 + (a_1 \cos \frac{\pi}{l} x + b_1 \sin \frac{\pi}{l} x) + (a_2 \cos \frac{2\pi}{l} x + b_2 \sin \frac{2\pi}{l} x) + \dots \quad (1)$$

(۲) سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

و یا

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \quad (۲)$$

بنویسیم یعنی ضرایب $a_0, (a_n, b_n), (a_n, b_n)$ و ... را طوری بیابیم که سری فوق به ازای هر مقدار x به سمت تابعی از x همگرا باشد. در هر صورت در این مرحله از کار فرض می‌کنیم شرایط لازم برای کاربرد قضایائی که در محاسبه این ضرایب لازم است برقرار باشند. قضیه مربوط به همگرایی را بعداً ارائه خواهیم کرد.

برای محاسبه ضرایب a_n ، مثلاً یک ضریب دلخواه a_m ، طرفین (۲) را در $\cos \frac{m\pi}{l} x$ ضرب می‌کنیم و با انتگرالگیری از طرفین نتیجه حاصل در فاصله $-l$ تا l می‌یابیم.

$$\int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi}{l} x dx = \int_{-l}^l \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \right] \cos \frac{m\pi}{l} x dx$$

حال فرض می‌کنیم شرایط لازم برای تساوی بین انتگرال سیگما با سیگمای انتگرال

برقرار باشد آنگاه با توجه به تعامد دنباله توابع $\{ \sin \frac{n\pi}{l} x, \cos \frac{m\pi}{l} x \}_{n=1, m=0}$ یعنی با توجه به

تساویهای

$$\int_{-l}^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x dx = \begin{cases} 0; & n \neq m \\ l; & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{m\pi}{l} x dx = \begin{cases} 0; & n \neq m \\ l; & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi}{l} x dx = 0, \quad \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0$$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{m\pi}{l} x dx = 0$$

می یابیم:

$$\int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi}{l} x dx = la_m$$

و از آنجا

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi}{l} x dx ; m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

همینطور برای محاسبه ضرایب b_n مثلاً ضریب دلخواه b_m با ضرب طرفین (۲) در $\sin \frac{m\pi}{l} x$ و انتگرالگیری در فاصله $-l$ تا l می یابیم

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx ; m = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

فرمولهای (۳) و (۴) به ازای هر مقدار صحیح و نامنفی m از جمله به ازای n برقراراند. ضرایب a_n و b_n حاصل از فرمولهای (۳) و (۴) به ضرایب اویلر موسومند و هر سری مثلثاتی به صورت (۱) را که ضرایب آن ضرایب اویلر باشند سری فوریه می نامیم. بنابراین سری فوریه تابع متناوب

$$y = f(x); \quad -l < x < l, \quad p = 2l$$

عبارت است از

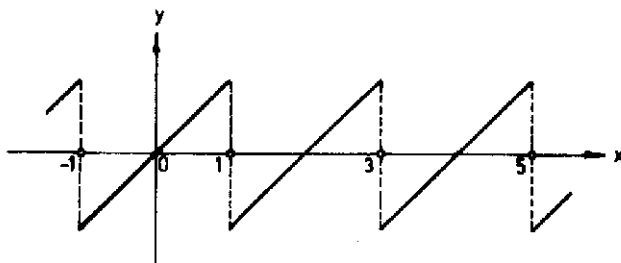
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \quad (5a)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (5b)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx ; n = 1, 2, \dots \quad (5c)$$

مثال ۱. مطلوب است سری فوریه تابع

$$f(x) = x \quad -1 < x \leq 1 \quad p=2$$



$$a_n = \int_{-1}^1 x \cos n \pi x \, dx = 0$$

$$b_n = \int_{-1}^1 x \sin n \pi x \, dx = 2 \int_0^1 x \sin n \pi x \, dx$$

$$b_n = 2 \left[-\frac{x}{n\pi} \cos n \pi x \right]_0^1 + \left[\frac{\sin n \pi x}{n^2 \pi^2} \right]_0^1 = \frac{-2}{n\pi} \cos n \pi = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

بنابراین

$$x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n \pi x; \quad -1 < x \leq 1; \quad p=2$$

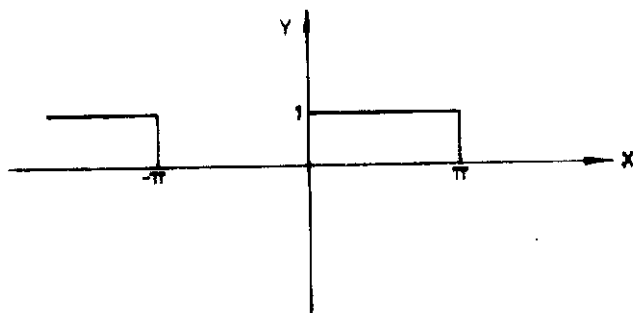
در حالتی که $\pi = 1$ یعنی هرگاه تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π باشد آنگاه داریم

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (6a)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (6b)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (6c)$$

مثال ۲. سری فوریه تابع با نمودار زیر را بیابید.



$$f(x) = \begin{cases} 0; & \pi < x < \infty \\ 1; & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0; \quad n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1}{n\pi} (1 + (-1)^{n+1})$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 + (-1)^{n+1}) \sin nx$$

چنانچه $p = 2l$; $-l < x < l$; $f(x) = f(x)$ تابعی زوج باشد یعنی $f(-x) = f(x)$ آنگاه با توجه

(۶)..... سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

به (۵c) داریم $b_n = 0$ و

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (7a)$$

که در آن

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (7b)$$

همینطور چنانچه $f(x) = 0$ تابعی فرد باشد آنگاه داریم $a_n = 0$ و

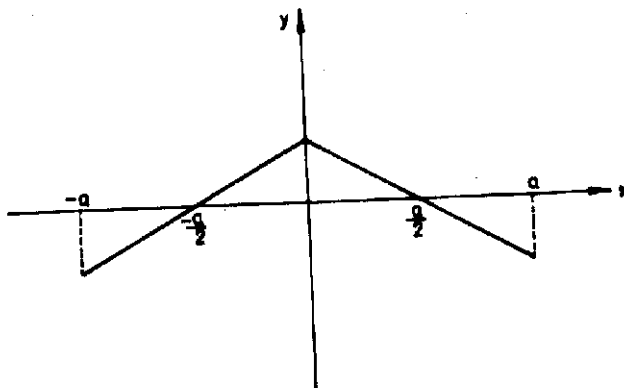
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (8a)$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (8b)$$

مثال ۳. سری فوریه تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{y}{\pi} x; & -\pi \leq x < 0 \\ 1 - \frac{y}{\pi} x; & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



این تابع یک تابع زوج است. بنابراین

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1}{\pi} x\right) \cos nx \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\pi} x\right) \frac{\sin nx}{n} + \left(\frac{1}{\pi}\right) \left(-\frac{\cos nx}{n}\right) \right\} \Bigg|_0^{\pi} =$$

$$\frac{1}{n^2 \pi^2} [1 + (-1)^{n+1}]; n \neq 0.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1}{\pi} x\right) dx = 0.$$

و در نتیجه

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [1 + (-1)^{n+1}] \cos nx$$

مثال ۴. سری فوریه تابع $p = 2\pi$ ، $-\pi < x < \pi$ ، $f(x) = x - x^2$ را بیابید.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x-x^2) \cos nx \, dx = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x-x^2) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x-x^2) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2\pi^2}{3}$$

بنابراین

$$f(x) = -\frac{\pi^2}{3} + 2 \left[\frac{\cos x}{1^3} - \frac{\cos 2x}{2^3} + \frac{\cos 3x}{3^3} - \dots \right] +$$

$$2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

(۸).....سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

هرگاه $-l < x < l$; $g(x) =$ یمتناوب و با دوره تناوب $2l$ باشد آنگاه می توان ثابت کرد که

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2l} g(x) dx = \int_{-l}^l g(x) dx$$

حال چنانچه تابع $\alpha < x \leq \alpha + 2l$; $f(x) =$ یا دروه تناوب $2l$ مفروض باشد. آنگاه سری فوریه این تابع عبارت است از

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x) \quad (9a)$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (9b)$$

مثال ۵. سری فوریه $0 < x < 2\pi$; $f(x) = x$ با دروه تناوب $2\pi = p$ را بیابید.

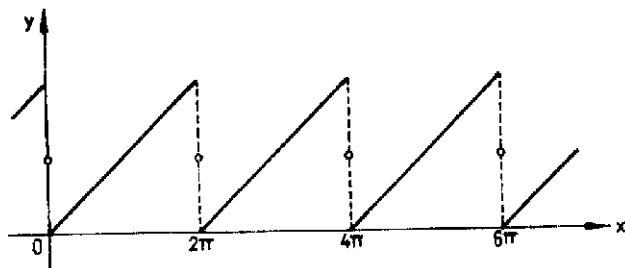
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right] \Bigg|_0^{2\pi} = 0; n \neq 0.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right] \Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}$$

بنابراین

$$f(x) = \pi - 2 \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right)$$



تاکنون مشاهده کردیم که هر تابع متناوب دارای سری فوریه است. ولی در مسائل کاربردی و در فصل بعدی این کتاب نیاز داریم که تابع $0 < x < l$; $f(x) = y$ را به صورت یک سری فوریه نمایش دهیم بدیهی است که این تابع به علت متناوب نبودن دارای سری فوریه نیست ولی توابع متناوبی موجودند که سری فوریه آنها در فاصله $0 \leq x \leq l$ بر $f(x)$ منطبق است. برای روشن شدن این موضوع چنین تابعی را که گسترش یا تعمیم $f(x)$ می نامیم و به $f^*(x)$ نمایش می دهیم چنین تعریف می کنیم.

$$f^*(x) = f(x) \quad , \quad 0 < x < l$$

$$f^*(x) = h(x) \quad , \quad -l < x < 0 \quad ; \quad p = 2l$$

که در آن $h(x)$ هر تابع دلخواهی است که در فاصله $-l$ تا صفر تعریف شده است. بدیهی است که $f^*(x)$ دارای سری فوریه بوده و سری فوریه آن در فاصله $0 < x < l$ با $f(x)$ برابر است. سری فوریه $f^*(x)$ اگر سری فوریه متناظر با $f(x)$ می نامیم. بدیهی است که تابع $0 < x < l$; $y = f(x)$ دارای بیشمار سری فوریه متناظر است و مابین این سریهای فوریه متناظر، دو سری فوریه در مسائل کاربردی از اهمیت بیشتری برخوردارند. این سریها به ترتیب از گسترشهای زوج و فرد $f(x)$ حاصل می شوند. گسترش زوج تابع $0 < x < l$; $f(x)$ را چنین تعریف می کنیم.

$$f^*(x) = f(x) \quad , \quad 0 < x < l$$

$$f^*(x) = f(-x) \quad , \quad -l < x < 0 \quad ; \quad p = 2l$$

آنگاه $f^*(x)$ گزاردای سری کسینوسی فوریه بوده و سری فوریه آن در فاصله $0 < x < l$ با $f(x)$ برابر است

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x = f(x) \quad ; \quad 0 < x < l$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad ; \quad n = 0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } \dots$$

گسترش فرد $f(x)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$f^*(x) = f(x) \quad , \quad 0 < x < l$$

$$; \quad p = 2l$$

$$f^*(x) = -f(-x) \quad ; \quad -l < x < 0$$

$f^*(x)$ گزاردای سری فوریه سینوسی بوده و در فاصله $0 < x < l$ با $f(x)$ برابر است

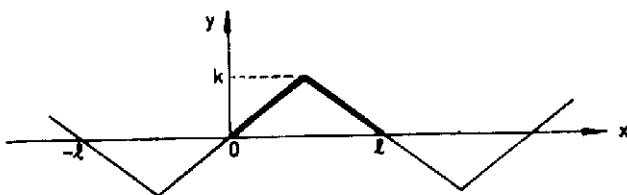
$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x) \quad ; \quad 0 < x < l$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad ; \quad n = 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots$$

مثال ۶. سریهای سینوسی و کسینوسی فوریه متناظر با تابع $f(x)$ با نمودار زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\gamma k}{l} x & ; \quad 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{\gamma k}{l} (l-x) & ; \quad \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

تابع $f(x)$ را می‌توان چنین نوشت



برای یافتن سری فوریه سینوسی متناظر با $f(x)$ داریم

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx =$$

$$\frac{1}{l} \left[\int_0^{l/2} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \right]$$

$$b_n = \frac{1}{l} \left[-\frac{lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_0^{l/2} + \frac{l}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi}{l} x - \frac{l(1-x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_{l/2}^l$$

$$- \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x \Big|_{l/2}^l$$

$$b_n = \frac{1}{l n \pi} \left[-\frac{l}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{l}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

و از آنجا سری فوریه سینوسی متناظر با $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{l} x ; 0 < x < l$$

همینطور برای سری کسینوسی متناظر با $f(x)$ داریم

$$a_n = \frac{1}{l} \left[\int_0^{l/2} x \cos \frac{n\pi}{l} x dx + \int_{l/2}^l (l-x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \right]$$

$$a_n = \frac{1}{l} \left[\frac{lx}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x \right]_0^{l/2} + \frac{l}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi}{l} x \right]_{l/2}^l$$

$$\frac{l(l-x)}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x \left[\frac{l}{n\pi} - \frac{l^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{l} x \right]$$

$$a_n = \frac{\gamma k}{n^2\pi^2} (\gamma \cos \frac{n\pi}{\gamma} - \cos n\pi - 1)$$

$$a_0 = k$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{k}{\gamma} + \frac{\gamma k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\gamma \cos \frac{n\pi}{\gamma} - \cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

برخی اوقات اتفاق می افتد که سری فوریه یک تابع در نقطه‌ای همگرا نبوده و یا به سمت مقدار تابع در این نقطه همگرا نیست مثلاً چنانچه در مثال ۱ مشاهده کردیم سری فوریه تابع

$$f(x) = x; -1 < x \leq 1 \text{ و } p = 2$$

$$\frac{\gamma}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x$$

است. مقدار سری در $x = 1$ برابر صفر ولی مقدار تابع در این نقطه برابر واحد است. بدین جهت است که بسیاری از مؤلفین از نماد \sim به جای نماد $=$ در سریهای فوریه استفاده می کنند. هم اکنون در موقعیتی هستیم که بتوانیم مقدار دقیق سری فوریه حاصل از یک تابع را در یک نقطه مفروض محاسبه کنیم و برای نیل به این هدف تعاریف و قضایای زیر را می آوریم.

تعریف ۱. تابع $f(x)$; $a \leq x \leq b$ را پیوسته تکه ای نامند هرگاه فاصله $[a, b]$ را با

انتخاب

$$a < x_1 < \dots < x_n < b$$

توان به تعدادی متناهی فاصله های جدا از هم افزاز کرد به طوری که f بر هر یک از این

فاصله‌ها پیوسته بوده و چنانچه از داخل بازه‌ها به سمت دو انتهای بازه میل کند فربه سمت حدی متناهی میل می‌کند یا به عبارت دیگر f در انتهای بازه‌ها دارای حدود چپ و راست متناهی باشد.

تعریف ۲. تابع $f(x) = f(x)$ را تکه‌ای همواره نامند هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته تکه‌ای بوده و f در نقاط داخلی زیر فاصله‌های مذکور در تعریف یک مشتقپذیر و در انتهای فاصله‌های جز دارای مشتقات چپ و راست باشد.
قبل از بیان قضیه همگرایی قضیه زیر را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱ (لم ریمن - لیبگ). هرگاه $g(x) = g(x)$ تابعی پیوسته تکه‌ای باشد آنگاه

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin \lambda x \, dx = 0$$

اثبات. می‌نویسیم

$$I(\lambda) = \int_a^b g(x) \sin \lambda x \, dx \quad (1)$$

با تبدیل x به $x + \frac{\pi}{\lambda}$ در انتگرال فوق می‌یابیم

$$I(\lambda) = - \int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^{b - \frac{\pi}{\lambda}} g(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x \, dx \quad (2)$$

با جمع طرفین (۱) و (۲) داریم

$$2I(\lambda) = \int_a^b g(x) \sin \lambda x \, dx - \int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^{b - \frac{\pi}{\lambda}} g(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x \, dx \quad (3)$$

حال طرفین تساوی را چنین می نویسیم

$$2I(\lambda) = - \int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^a g(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x dx + \int_{b - \frac{\pi}{\lambda}}^b g(x) \sin \lambda x dx + \int_a^{b - \frac{\pi}{\lambda}} [g(x) - g(x + \frac{\pi}{\lambda})] \sin \lambda x dx$$

چنانچه $g(x)$ را تابعی پیوسته فرض کنیم آنگاه $g(x)$ کراندار نیز خواهد بود. یعنی به ازای عدد ثابتی مانند M داریم $|g(x)| \leq M$ در نتیجه

$$\left| \int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^a g(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin \lambda x dx \right| = \left| \int_a^{a + \frac{\pi}{\lambda}} g(x) \sin \lambda x dx \right| \leq \frac{\pi M}{\lambda}$$

و همینطور

$$\left| \int_{b - \frac{\pi}{\lambda}}^b g(x) \sin \lambda x dx \right| \leq \frac{\pi M}{\lambda}$$

از اینرو

$$|I(\lambda)| \leq \frac{\pi M}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^{b - \frac{\pi}{\lambda}} |g(x) - g(x + \frac{\pi}{\lambda})| dx$$

نظر به اینکه $g(x)$ بر فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته است بنابراین $g(x)$ بر این فاصله به طور یکتا پیوسته خواهد بود. در نتیجه به ازای هر عدد مثبت ε عددی مثل λ را طوری می توان انتخاب کرد که به ازای هر $\lambda > \lambda_0$ ، $\frac{\pi M}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{\lambda}$ و به ازای هر x

$$|g(x) - g(x + \frac{\pi}{\lambda})| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

در نتیجه

$$|I(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$$

به این طریق قضیه به اثبات می رسد. نتیجه حاصل از قضیه فوق برای توابع پیوسته تکه ای نیز برقرار است. برای این منظور کافی است قضیه را برای هر یک از فاصله های جزء فاصله

$[a, b]$ که g بر آن پیوسته است تکرار کنیم.

قضیه ۲. هرگاه $f(x)$ بر فاصله بسته $[-\pi, \pi]$ تکه‌ای هموار و متناوب با دوره تناوب 2π باشد آنگاه به ازای هر x

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

که در آن a_n و b_n ضرایب اویلر و $f(x+)$ و $f(x-)$ به ترتیب برابر حدود راست و چپ تابع در نقطه x هستند.

اثبات. هرگاه فرض کنیم

$$s_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

آنگاه با جایگزین کردن

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

به ترتیب به جای a_n و b_n می‌یابیم

$$s_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^k \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \right\} \cos nx + \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \right\} \sin nx$$

$$s_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx \right] dt$$

$$s_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{\gamma} + \sum_{n=1}^k \cos n(t-x) \right] dt$$

با توجه به تساوی

$$\gamma \sin \frac{\alpha}{\gamma} \cos n\alpha = \sin \left(n + \frac{1}{\gamma} \right) \alpha - \sin \left(n - \frac{1}{\gamma} \right) \alpha$$

می‌یابیم

$$\gamma \sin \frac{\alpha}{\gamma} \left[\frac{1}{\gamma} + \sum_{n=1}^k \cos n\alpha \right] = \sin \frac{\alpha}{\gamma} + \left[\sin \frac{2\alpha}{\gamma} - \sin \frac{\alpha}{\gamma} \right] + \dots + \left[\sin \left(k + \frac{1}{\gamma} \right) \alpha \right.$$

$$\left. - \sin \left(k - \frac{1}{\gamma} \right) \alpha \right] = \sin \left(k + \frac{1}{\gamma} \right) \alpha$$

و از آنجا

$$s_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \left(k + \frac{1}{\gamma} \right) (t-x)}{\gamma \sin \left(\frac{t-x}{\gamma} \right)} dt$$

با تغییر متغیر $s = t - x$ داریم

$$s_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x) \frac{\sin \left(k + \frac{1}{\gamma} \right) s}{\gamma \sin \left(\frac{s}{\gamma} \right)} ds$$

هرگاه $f(x)$ متناوب با دوره تناوب 2π باشد آنگاه

$$s_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) \frac{\sin \left(k + \frac{1}{\gamma} \right) s}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} ds$$

این فرمول به فرمول دیریکله و $\frac{\sin \left(k + \frac{1}{\gamma} \right) s}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}}$ به کرنل دیریکله موسوم است. چنانچه

به جای f مقدار واحد قرار دهیم می یابیم

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(k + \frac{1}{\gamma})s}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\frac{1}{\gamma} + \sum_{n=1}^k \cos n s] ds = 1 \quad (1)$$

حال $s_k(x)$ را چنین می نویسیم

$$s_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \frac{\sin(k + \frac{1}{\gamma})s}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} ds + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(x+s) \frac{\sin(k + \frac{1}{\gamma})s}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} ds$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+s) - f(x-) + f(x-)] \frac{\sin(k + \frac{1}{\gamma})s}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} ds$$

با توجه به (۱) می یابیم

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-) \frac{\sin(k + \frac{1}{\gamma})s}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} ds = \frac{f(x-)}{\gamma} \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(k + \frac{1}{\gamma})s}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} ds = \frac{f(x-)}{\gamma}$$

بنابراین

$$I_1 = \frac{f(x-)}{\gamma} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+s) - f(x-)}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} \sin(k + \frac{1}{\gamma})s ds$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+s) - f(x-)}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} = \lim_{s \rightarrow 0} [\frac{f(x+s) - f(x-)}{s}] \frac{s}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} \lim_{s \rightarrow 0} [\frac{f(x+s) - f(x-)}{s}] = f'(x-)$$

بنابراین تابع $\frac{f(x+s) - f(x-)}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}}$ به طور تکه ای هموار است. از اینرو قضیه ۱ (لم ریمن-لیبگ) را

می توان به کار برد و نتیجه گرفت

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+s) - f(x-)}{\gamma \sin \frac{s}{\gamma}} \sin(k + \frac{1}{\gamma})s ds = 0$$

در نتیجه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_1 = \frac{f(x-)}{2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_2 = \frac{f(x+)}{2}$$

و همینطور

بنابراین

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

این قضیه به سادگی برای هر تابع با دوره تناوب $2l$ نیز قابل تعمیم است.

مثال ۷. سری فوریه تابع $f(x) = x + x^2$ در فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ یافته و با توجه به آن مقدار عددی سری $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ را بیابید.

حل: به سادگی می توان ثابت کرد که

$$x + x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx - \frac{2}{n} (-1)^n \sin nx \right)$$

هم اکنون مقدار سری فوریه تابع را در $x = \pi$ می یابیم. با توجه به اینکه $f(\pi-) = \pi + \pi^2$ و

$$f(\pi+) = -\pi + \pi^2$$

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx = \frac{1}{2} [f(\pi+) + f(\pi-)] = \frac{1}{2} [(\pi + \pi^2) + (-\pi + \pi^2)] = \pi^2$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

از این به بعد سری فوریه یک تابع را در نقطه x برابر $f(x)$ می‌گیریم و توجه می‌کنیم که نماد تساوی در سری فوریه به معنی همان نماد \sim است.

قضیه ۳. فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته در فاصله $[-\pi, \pi]$ بوده و $f(-\pi) = f(\pi)$ همچنین $f'(x)$ در این فاصله پیوسته تکه‌ای باشد. آنگاه سری فوریه تابع $f(x)$ را می‌توان با مشتقگیری جمله به جمله از سری فوریه $f(x)$ به دست آورد. و سری حاصل از این مشتقگیری در هر نقطه x به سمت

$$\frac{1}{2} [f'(x+) + f'(x-)]$$

همگراست.

اثبات. فرض می‌کنیم f' به ترتیب دارای سریهای فوریه به صورت زیر باشند.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

و

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

داریم

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} [f(x) \cos nx] \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

(۲۰) سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

$$A_n = nb_n ; n = ۱ و ۲ و ۳ ...$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} [f(x) \sin nx] \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$B_n = -na_n ; n = ۱ و ۲ و ۳ ...$$

بنابراین در نقاطی که $f'(x)$ پیوسته باشد سری فوریه

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

به صورت زیر در می آید

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

که با مشتقگیری جمله به جمله از سری فوریه

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

نیز سری فوریه فوق حاصل می شود. در نقاطی که $f'(x)$ پیوسته نیست هنوز قاعده جمله به جمله مشتقگیری برقرار است یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \sin nx + nb_n \cos nx) = \frac{1}{2} [f'(x+) + f'(x-)]$$

قضیه ۴. فرض کنید $f(x)$ بر $[-\pi, \pi]$ پیوسته تکه ای و متناوب با دوره 2π باشد آنگاه از

سری فوریه $f(x)$ یعنی از

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

می توان جمله به جمله در هر فاصله انتگرالگیری کرد.

اثبات. در واقع باید ثابت کنیم

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx \right]$$

و بنابراین کافی است نشان دهیم

$$\int_a^b \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(a_n \sin nb - \sin na) - b_n (\cos nb - \cos na) \right]$$

نخست چنین قرار می دهیم

$$F(x) = \int_a^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt$$

نظر به اینکه F پیوسته تکه ای است F پیوسته خواهد بود و علاوه بر آن

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

پیوسته تکه ای است. حال با توجه به اینکه f متناوب، با دوره 2π و $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

داریم

$$F(x+2\pi) = \int_a^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt + \int_x^{x+2\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = F(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = F(x)$$

(۲۲) سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

بنابراین F تابعی پیوسته و متناوب با دوره 2π است که دارای مشتق پیوسته تکه‌ای می‌باشد. از اینرو می‌توان چنین نوشت

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

که در آن $A_n = -\frac{b_n}{n}$ و $B_n = \frac{a_n}{n}$ و بنابراین

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \right]$$

بنا به تعریف $F(x)$ نتیجه می‌شود که

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

نظر به اینکه

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^b f(t) dt - \int_0^a f(t) dt$$

داریم

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{a_0}{2} (b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nb - b_n \cos nb) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin na - b_n \cos na)$$

به علت همگرایی مطلق این سریها می‌توان چنین نوشت

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{a_0}{2} (b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [a_n (\sin nb - \sin na) - b_n (\cos nb - \cos na)]$$

که سری حاصل از سری فوریه $f(x)$ با جمله به جمله انتگرالگیری است.

مثال ۸. سری فوريه کسينوسی متناظر با تابع $f(x) = \sin x$; $0 < x < \pi$ را بيابيد و با مشتقگيري از آن سری فوريه تابع $\cos x$ را بيابيد.

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{1(1+(-1)^n)}{\pi(1-n^2)} ; n \neq 1$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0$$

نظر به اينکه a_n به ازای n های فرد صفر است داريم

$$\sin x = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2} ; 0 < x < \pi$$

بنابراين با مشتقگيري می‌يابيم

$$\cos x = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{1-4n^2} ; 0 < x < \pi$$

مثال ۹. سری فوريه $f(x) = x$; $-\pi < x < \pi$ را بيابيد و با انتگرالگيري از سری حاصل سری فوريه تابع x^2 را بيابيد.

$$x = \frac{1}{2} \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

با انتگرالگيري می‌يابيم

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \left[-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right] + c$$

برای يافتن c از طرفين اين تساوی در فاصله $-\pi$ و π انتگرال می‌گيريم و می‌يابيم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} \, dx = c \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

و از آنجا

$$c = \frac{\pi^2}{6}$$

بنابراین

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

۲.۱. سری فوریه دوگانه

فرض کنید $f(x,y)$ نسبت به دو متغیر متناوب و با دوره تناوب 2π باشد، یعنی $f(x+2\pi,y) = f(x,y+2\pi) = f(x,y)$ و تابع به اندازه کافی هموار باشد آنگاه با نوشتن سری فوریه تابع $f(x,y)$ نسبت به x می‌یابیم

$$f(x,y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_m(y) \cos mx + b_m(y) \sin mx]$$

که در آن

$$a_m(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \cos mx \, dx$$

$$b_m(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \sin mx \, dx$$

نظر به اینکه $f(x,y)$ نسبت به y متناوب است بنابراین $a_m(y)$ و $b_m(y)$ متناوب هستند و آنها را نیز می‌توان به صورت سری فوریه نمایش داد

$$a_m(y) = \frac{a_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos ny + b_{mn} \sin ny)$$

$$b_m(y) = \frac{c_{m0}}{Y} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{mn} \cos ny + d_{mn} \sin ny)$$

که در آن

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \cos mx \cos ny \, dx \, dy \quad (1a)$$

$$b_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \cos mx \sin ny \, dx \, dy \quad (1b)$$

$$c_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \sin mx \cos ny \, dx \, dy \quad (1c)$$

$$d_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \sin mx \sin ny \, dx \, dy \quad (1d)$$

بتابراین

$$f(x,y) = \frac{a_{00}}{Y} + \frac{1}{Y} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{0n} \cos ny + b_{0n} \sin ny] + \frac{1}{Y} \sum_{m=1}^{\infty} [a_{m0} \cos mx + c_{m0} \sin mx] \quad (2)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \cos mx \sin ny]$$

$$+ c_{mn} \sin mx \cos ny + d_{mn} \sin mx \sin ny]$$

که سری فوریه دوگانه تابع $f(x,y)$ است.

(۲۶) سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

چنانچه $f(x, -y) = f(x, y)$ و $f(-x, y) = f(x, y)$ آنگاه همه ضرایب به جز a_{mn} صفر هستند.

بنابراین

$$f(x, y) = \frac{a_{..}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{..n} \cos ny + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m..} \cos mx + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos mx \cos ny \quad (3)$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \cos mx \cos ny \, dx \, dy \quad (4)$$

هرگاه

$$f(x, -y) = -f(x, y) , \quad f(-x, y) = f(x, y)$$

آنگاه داریم

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{..n} \sin ny + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cos mx \sin ny \quad (5)$$

که در آن

$$b_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \cos mx \sin ny \, dx \, dy \quad (6)$$

اگر $f(x, -y) = f(x, y)$, $f(-x, y) = -f(x, y)$ آنگاه داریم

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m..} \sin mx + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin mx \cos ny \quad (7)$$

که در آن

$$c_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin mx \cos ny \, dx \, dy \quad (8)$$

در پایان چنانچه $f(-x, y) = -f(x, y)$, $f(x, -y) = -f(x, y)$ آنگاه داریم

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \sin mx \sin ny \quad (۹)$$

که در آن

$$d_{mn} = \frac{۴}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x,y) \sin mx \sin ny \, dx \, dy \quad (۱۰)$$

مثال ۱. تابع $f(x,y) = xy$ را به صورت سری فوریه دوگانه در فاصله $-\pi < x < \pi$ و $-\pi < y < \pi$ بسط دهید.

نظر به اینکه

$$f(x,-y) = -xy = -f(x,y) \quad , \quad f(-x,y) = -xy = -f(x,y)$$

داریم

$$d_{mn} = \frac{۴}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x y \sin mx \sin ny \, dx \, dy = (-1)^{m+n} \times \frac{۴}{mn}$$

بنابراین سری فوریه مورد نظر عبارت است از

$$f(x,y) = ۴ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \times \frac{\sin mx \sin ny}{mn}$$

۳.۱. انتگرال فوریه

چنانچه در بخش ۱.۱ مشاهده شد هر تابع متناوب دارای سری فوریه و هر تابع با حوزه تعریف متناهی دارای سریهای فوریه متناظر است. بدیهی است که تابع غیر متناوب

$$y = f(x) \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

دارای سری فوریه نیست ولی آن را می توان به صورت حد سری فوریه یک تابع دیگر نمایش

داد و چنانچه خواهیم دید حد چنین سری فوریه‌ای را می‌توان به صورت یک انتگرال نمایش داد که به انتگرال فوریه موسوم است. برای این منظور تابع

$$f_l(x) = f(x) ; -l < x < l ; p = 2l$$

که در آن l یک عدد دلخواه است را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که حد تابع $f_l(x)$ وقتی که l به بینهایت میل کند تابع $f(x) ; -\infty < x < \infty$ است. تابع $f_l(x)$ دارای سری فوریه است و $f(x)$ با حد این سری فوریه وقتی که $l \rightarrow \infty$ برابر است یعنی

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \right)$$

سری فوریه فوق سری فوریه تابع $f_l(x)$ است چنانچه فرض کنیم $f(x)$ مطلقاً انتگرالپذیر

باشد. یعنی $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$ که در آن M عددی ثابت است آنگاه

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f(x) dx \right| \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)| dx \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{M}{l} = 0$$

بنابراین داریم

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \right\}$$

حال قرار می‌دهیم $w_n = \frac{n\pi}{l}$ و مقادیر a_n و b_n را به صورت انتگرال در تساوی فوق قرار می‌دهیم و می‌یابیم

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-l}^l f(t) \cos w_n t dt + \sin w_n x \int_{-l}^l f(t) \sin w_n t dt \right] \right\}$$

حال چنانچه قرار دهیم

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{\pi}{l}$$

آنگاه با ضرب طرف دوم در $\frac{l}{\pi} \Delta w$ می‌یابیم

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [\cos w_n x \int_{-l}^l f(t) \cos w_n t dt + \sin w_n x \int_{-l}^l f(t) \sin w_n t dt] \Delta w \right\}$$

عبارت داخل کروشه تابعی از w_n و x بوده و مجموع فوق یک مجموع انتگرال است که آن را با توجه به تغییرات w می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\cos w x \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos w t dt + \sin w x \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin w t dt] dw$$

حال اگر فرض کنیم

$$a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos w x dx \quad (1a)$$

و

$$b(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin w x dx \quad (1b)$$

که به ضرایب اویلر مرسوم‌اند آنگاه می‌یابیم

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(w) \cos w x + b(w) \sin w x] dw \quad (2)$$

که به انتگرال فوریه تابع $f(x)$ موسوم است.

مثال ۱. انتگرال فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} x; & |x| < \pi \\ 0; & |x| > \pi \end{cases}$$

را در صورت وجود بیابید.

حل: داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = 2 \int_0^{\pi} x dx = \pi^2$$

بنابراین انتگرال فوریه تابع مزبور موجود است، از طرفی داریم

$$a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos wx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos wx dx = 0$$

$$b(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin wx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin wx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{w} \cos wx + \frac{1}{w^2} \sin wx \right]_{0}^{\pi}$$

$$b(w) = \frac{2}{w\pi} \left(\frac{1}{w} \sin w\pi - \pi \cos w\pi \right)$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{w} \left(\frac{1}{w} \sin w\pi - \pi \cos w\pi \right) \sin wx dx dw$$

شاید بهتر بود که همانند آنچه در بخش مربوط به سریهای فوریه گفته شد به جای نماد تساری در انتگرال فوریه از نماد \sim استفاده می‌کردیم در هر صورت قضیه همگرایی مربوط به انتگرال فوریه را می‌توان چنین بیان کرد.

قضیه ۱. هرگاه $-\infty < x < \infty$; $y = f(x)$ مطلقاً انتگرالپذیر و هموار تکه‌ای باشد آنگاه انتگرال فوریه تابع $f(x)$ در نقطه x به سمت میانگین حدود چپ و راست تابع در این نقطه همگراست یعنی

$$\int_0^{\infty} (a(w) \cos wx + b(w) \sin wx) dw = \frac{1}{\gamma} [f(x+) + f(x-)]$$

۴.۱. صورت مختلط سری و انتگرال فوریه

با استفاده از فرمولهای $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ می توان نتیجه گرفت

$$\cos nx = \frac{1}{\gamma} (e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{\gamma i} (e^{inx} - e^{-inx})$$

و با جایگزین کردن این مقادیر در سری فوریه تابع متناوب

$$y = f(x); \quad -\pi < x < \pi; \quad p = 2\pi$$

یعنی در

$$f(x) = \frac{a_0}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

می یابیم

$$f(x) = \frac{a_0}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\gamma} (a_n - ib_n) e^{inx} + \frac{1}{\gamma} (a_n + ib_n) e^{-inx} \right]$$

حال چنین قرار می دهیم

$$c_0 = \frac{a_0}{\gamma}$$

$$d_n = \frac{1}{\gamma} (a_n + ib_n), \quad c_n = \frac{1}{\gamma} (a_n - ib_n)$$

بنابراین داریم

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + d_n e^{-inx}) \quad (1)$$

که در آن

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (a_n - ib_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (2a)$$

و

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{+inx} dx \quad (2b)$$

به سادگی می توان ثابت کرد که فرمولهای (۱) و (۲a) و (۲b) با فرمولهای زیر معادلند

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (3)$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx ; n=0 \text{ و } \pm 1 \text{ و } \pm 2 \text{ و } \pm \dots \quad (4)$$

چنانچه تابع $f(x)$ فاصله $[-l, l]$ تعریف شده و با دوره $2l$ باشد آنگاه فرمولهای (۳) و (۴) به صورتهای زیر در می آیند

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l} x} \quad (5)$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx ; n=0 \text{ و } \pm 1 \text{ و } \pm 2 \text{ و } \pm \dots \quad (6)$$

با توجه به روابط

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{l}} (a_n - ib_n) ; c_{-n} = \frac{1}{\sqrt{l}} (a_n + ib_n) \quad (7)$$

می یابیم

$$a_n = c_n - c_{-n} ; b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad (8)$$

و با مشخص بودن یک شکل سری فوریه یک تابع می توان صورت دیگر آن را به دست آورد.

مثال ۱. صورت مختلط سری فوریه تابع $p = 2\pi$; $-\pi < x < \pi$; $y = f(x) = e^x$ را یافته و به کمک آن صورت حقیقی سری فوریه تابع مزبور را بیابید.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{(1-in)} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1+in}{1+n^2} [e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}] = \frac{\sinh \pi}{\pi} \times \frac{1+in}{1+n^2} (-1)^n$$

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+in}{1+n^2} (-1)^n e^{inx}$$

و با توجه به فرمولهای (۸) داریم

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{\sinh \pi}{\pi} (-1)^n \left[\frac{1+in}{1+n^2} + \frac{1-in}{1+n^2} \right] = \frac{2\sinh \pi}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} (-1)^n \left[\frac{1+in}{1+n^2} - \frac{1-in}{1+n^2} \right] = -2n \frac{\sinh \pi}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$a_0 = \frac{2\sinh \pi}{\pi}$$

بنابراین صورت حقیقی سری فوریه تابع $f(x)$ عبارت است از

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \right]$$

همینطور با جایگزین کردن

$$\sin wx = \frac{1}{2i} (e^{iwx} - e^{-iwx}) ; \cos wx = \frac{1}{2} (e^{iwx} + e^{-iwx})$$

در انتگرال فوریه (۱) مذکور در بخش ۳.۱ می یابیم

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{a(w) - ib(w)}{2} \right) e^{iwx} + \left(\frac{a(w) + ib(w)}{2} \right) e^{-iwx} \right] dw$$

یا فرض

$$d(w) = \frac{1}{2} (a(w) + ib(w)) ; c(w) = \frac{1}{2} (a(w) - ib(w))$$

می یابیم

$$f(x) = \int_0^{\infty} (c(w) e^{iwx} + d(w) e^{-iwx}) dw \quad (۹)$$

$$c(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx ; d(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{iwx} dx \quad (۱۰)$$

فرمولهای (۹) و (۱۰) را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(w) e^{iwx} dw \quad (۱۱)$$

$$c(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \quad (۱۲)$$

فرمول (۱۱) انتگرال فوریه $f(x)$ به صورت مختلط و (۱۲) به ضریب اولر موسوم است

داریم $d(w) = c(-w)$ بنابراین

$$c(w) = \frac{1}{2} (a(w) - ib(w)) ; c(-w) = \frac{1}{2} (a(w) + ib(w)) \quad (۱۳)$$

$$a(w) = c(w) + c(-w) , b(w) = i(c(w) - c(-w)) \quad (۱۴)$$

به کمک روابط فوق می توان انتگرال فوریه یک تابع را از یک صورت به صورت دیگر نوشت.

مثال ۲. صورت مختلط انتگرال فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 ; & |x| < \pi \\ 0 ; & |x| > \pi \end{cases}$$

را بیابید و به کمک آن انتگرال فوریه آن را به صورت حقیقی معین کنید.

$$c(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-iwx} dx$$

بنابراین

$$= \frac{i}{2w\pi} e^{-iwx} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin w\pi}{w\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w\pi}{w} e^{iwx} dw$$

که صورت مختلط انتگرال فوریه تابع فوق است. برای پیدا کردن صورت حقیقی انتگرال فوریه $f(x)$ از فرمولهای (۱۴) استفاده می‌کنیم

$$a(w) = c(w) + c(-w) = 2 \frac{\sin w\pi}{w\pi}$$

$$b(w) = i(c(w) - c(-w)) = 0$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w\pi}{w} \cos wx dw$$

به کمک انتگرال فوریه می‌توان برخی از انتگرالهای حقیقی را محاسبه نمود، مثلاً چنانچه قرار دهیم $x = 0$ آنگاه داریم

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w\pi}{w} dw = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w\pi}{w} dw = 1$$

و با تغییر متغیر مناسب می‌توان ثابت کرد که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

۵.۱. تبدیلات فوریه

تبدیل کسینوسی فوریه تابع $f(x)$ را که به $F_c\{f\}$ نمایش می دهیم. چنین تعریف می کنیم:

$$F_c\{\bar{f}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx dx \quad (1)$$

که آن را گاهی اوقات به $\bar{f}_c(w)$ نیز نمایش می دهند. تبدیل کسینوسی فوریه معکوس $\bar{f}_c(w)$ را که تابع $f(x)$ را نتیجه می دهد چنین تعریف می شود

$$F_c^{-1}\{\bar{f}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}_c(w) \cos wx dw = f(x) \quad (2)$$

همینطور تبدیلات سینوسی فوریه و معکوس آن به ترتیب چنین تعریف می شوند

$$F_s\{f\} = \bar{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx dx \quad (3)$$

$$F_s^{-1}\{\bar{f}\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{f}_s(w) \sin wx dw \quad (4)$$

مثال ۱. تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < a \\ 0; & x > a \end{cases}$$

را بیابید.

$$\bar{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos w x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin wa}{w}$$

$$\bar{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos wa}{w}$$

تبدیلات کسینوسی یا سینوسی تبدیلاتی خطی هستند. در واقع

$$F_c \{af + bg\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [af(x) + bg(x)] \cos wx \, dx = aF_c \{f\} + bF_c \{g\}$$

و همینطور

$$F_s \{af + bg\} = aF_s \{f\} + bF_s \{g\}$$

قضیه ۱. فرض کنید $f(x)$ فیزیسته و مطلقاً انتگرالپذیر بر روی محور x بوده و $f(x)$ فیزیسته تکه‌ای بر هر فاصله متناهی باشد و $f(x) \rightarrow 0$ وقتی که $x \rightarrow \infty$ آنگاه

$$F_c \{f'\} = wF_s \{f\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \quad (5)$$

$$F_s \{f'\} = -wF_c \{f\} \quad (6)$$

اثبات. با انتگرالگیری به روش جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned} F_c \{f'\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \cos wx \Big|_0^{\infty} + w \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + wF_s \{f\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_s \{f'\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \sin wx \Big|_0^{\infty} - w \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx \right] \\ &= 0 - wF_c \{f\} = -wF_c \{f\} \end{aligned}$$

و همینطور می توان ثابت کرد

$$F_c \{f''\} = -w^2 F_c \{f\} - \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} f'(\cdot) \quad (۷)$$

$$F_s \{f''\} = -w^2 F_s \{f\} + \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} w f(\cdot) \quad (۸)$$

مثال ۲. به کمک قضیه فوق تبدیل کسینوسی تابع $f(x) = e^{-ax}$; $a > 0$ را بیابید.

داریم $(e^{-ax})'' = a^2 e^{-ax}$ بنابراین $f''(x) = a^2 f(x)$ از اینرو با توجه به (۷) داریم

$$a^2 F_c \{f\} = F_c \{f''\} = -w^2 F_c \{f\} - \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} f'(\cdot) = -w^2 F_c \{f\} + a \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}$$

در نتیجه

$$(a^2 + w^2) F_c \{f\} = a \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}$$

پس

$$F_c \{e^{-ax}\} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right)$$

تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس تابع $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$; $-\infty < x < +\infty$ را چنین تعریف می کنیم

$$F \{f\} = \tilde{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx \quad (۹)$$

$$F^{-1} \{\tilde{f}\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(w) e^{iwx} dw \quad (۱۰)$$

می توان ثابت کرد که هر تابعی که پیوسته تکه ای بر هر فاصله متناهی بوده و مطلقاً انتگرال پذیر باشد دارای تبدیل فوریه است.

مثال ۳. تبدیل فوریه تابع $f(x) = e^{-ax^2}$; $a > 0$ را بیابید

$$F\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+iwx)} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x\sqrt{a} + \frac{iw}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{iw}{\sqrt{a}}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{iw}{\sqrt{a}})^2} dx$$

با توجه به اینکه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ می‌یابیم

$$F\{e^{-ax^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$$

تبدیل فوریه یک تبدیل خطی است، یعنی

$$F\{af + bg\} = aF\{f\} + bF\{g\}$$

قضیه ۲. فرض می‌کنیم $f(x)$ بر محور x پیوسته باشد و $f(x) \rightarrow 0$ وقتی که $x \rightarrow \infty$ بر آن $f'(x)$ مطلقاً انتگرالپذیر باشد آنگاه

$$F\{f'(x)\} = iw F\{f(x)\} \quad (11)$$

اثبات. درایم

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \right] = iw F\{f\}$$

همینطور می توان نتیجه گرفت

$$F\{f''\} = -w^2 F\{f\} \quad (12)$$

مثال ۴. تبدیل فوریه تابع $x e^{-x^2}$ را بیابید.

$$F\{x e^{-x^2}\} = F\left\{-\frac{1}{2} (e^{-x^2})'\right\} = -\frac{1}{2} F\{(e^{-x^2})'\}$$

$$= -\frac{1}{2} i w F\{e^{-x^2}\} = -\frac{1}{2} i w \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} = -\frac{i w}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}$$

یکی از قضایای بسیار جالب تبدیل فوریه به قضیه پیچش موسوم است. قبل از بیان این قضیه به تعریف پیچش می پردازیم.

پیچش توابع f و g را که به $g \circ f$ نمایش می دهیم، چنین تعریف می کنیم

$$(f \circ g)(x) = h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt \quad (13)$$

چنانچه $F\{f\}$ و $F\{g\}$ به ترتیب تبدیلات فوریه f و g باشند آنگاه $F\{f \circ g\}$ برابر تبدیل فوریه $(f \circ g)$ است. این موضوع را می توان از قضیه زیر نتیجه گرفت.

قضیه ۳ (قضیه پیچش). فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ پیوسته تکه ای بر هر فاصله متناهی، کرندار و مطلقاً انتگرالپذیر بر محور x باشند آنگاه

$$F\{f \circ g\} = \sqrt{2\pi} F\{f\} F\{g\}$$

اثبات.

$$F\{f \circ g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) e^{-iwx} dt dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) e^{-iwx} dx dt$$

چنانچه تغییر متغیر $u = t - x$ بدهیم می‌یابیم

$$F\{f \circ g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(u) e^{-i\omega(t+u)} dt du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega x} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du$$

$$= \sqrt{2\pi} F\{f\} F\{g\}$$

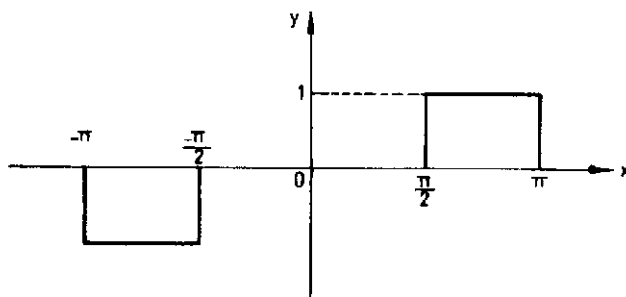
با نوشتن $\bar{f} = F\{f\}$ و $\bar{g} = F\{g\}$ و تبدیل معکوس‌گیری از طرفین تساوی فوق می‌یابیم

$$(f \circ g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(w) \bar{g}(w) e^{i\omega x} dw$$

که فرمول مناسبی برای حل مسائل معادلات با مشتقات جزئی است.
جدولی برای تبدیلات فوریه برخی از توابع در انتهای این کتاب ارائه می‌گردد.

۶.۱. مسائل حل شده

مثال ۱. سری فوریه تابع با نمودار زیر را بیابید.



نظر به اینکه تابع فرد است $a_n = 0$ و

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \, dx = \frac{1}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi \right)$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi \right) \sin nx$$

مثال ۲. سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi + x & ; -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2}\pi - x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

را بیابید

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \left(\frac{1}{2}\pi + x \right) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\pi - x \right) \cos nx \, dx \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{2n} \sin nx + \frac{x \sin nx}{n} + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{\pi}{2n} \sin nx - \frac{x \sin nx}{n} - \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_{0}^{\pi} \right\} = \frac{1}{n^2 \pi} (1 + (-1)^{n+1})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \left(\frac{1}{2}\pi + x \right) dx + \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx \right] = 0$$

چون تابع زوج است داریم

$$b_n = 0$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left((-1)^{n+1} + 1 \right) \cos nx$$

مثال ۳. سری فوریه تابع $f(x) = x + \sin x$, $-\pi < x < \pi$ را بیابید.

$$f(-x) = -f(x) ; a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin x) \sin nx \, dx = \frac{1}{n\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin nx \, dx \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{1}{n} (-1)^{n+1} ; n \neq 1$$

$$b_1 = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = 2$$

بنابراین

$$f(x) = 2 \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

مثال ۴. سری فوریه تابع

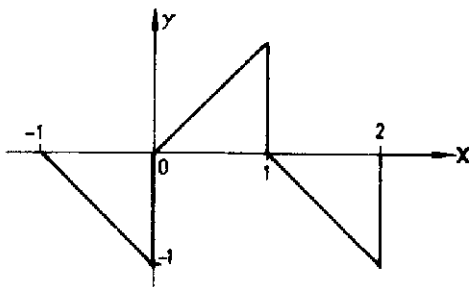
$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 1 \\ 1-x & ; 1 < x < 2 \end{cases} ; p = 2$$

را بیابید.

$$a_n = \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx + \int_1^2 (1-x) \cos n\pi x \, dx = \frac{1}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1)$$

$$a_n = 0 , b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx + \int_1^2 (1-x) \sin n\pi x \, dx = \frac{1}{n} ((-1)^{n+1} + 1)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi x + \frac{1}{n} ((-1)^{n+1} + 1) \sin n\pi x \right]$$



مثال ۵. سری فوریه تابع $f(x) = e^x$; $-\pi < x < \pi$ را بیابید.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^x \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{e^x \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \left[\frac{-e^x \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx \right\} \\
 &= \frac{\Upsilon(-1)^n}{n^2 \pi} \left(\frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{\Upsilon} \right) - \frac{1}{n^2} a_n
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$a_n = \frac{\Upsilon(-1)^n}{(\lambda + n^2)\pi} \sinh \pi$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-e^x \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{\cos n\pi}{n} \right) (e^{\pi} - e^{-\pi}) - \frac{1}{n^2} b_n \right]
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{\Upsilon n (-1)^{n+1}}{\pi(\lambda + n^2)} \sinh \pi$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left\{ \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Upsilon(-1)^n}{\lambda + n^2} (\cos nx - n \sin nx) \right\}$$

مثال ۶. صورت حقیقی سری فوریه تابع $f(x) = x^r$ ، $-l < x < l$ را بیابید و با توجه به آن مقادیر هریک از سریهای عددی $1 - \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} - \dots$ و $1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \dots$ را به دست آورید.

$$a_n = \frac{r}{l} \int_0^l x^r \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{r}{l} \left[-\frac{rl}{n\pi} \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right]$$

$$= \frac{r}{n\pi} \frac{l}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^l = \frac{rl^r}{n^r \pi^r} (-1)^n, \quad n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{r}{l} \int_0^l x^r dx = \frac{rl^r}{r}$$

$$f(x) = x^r = \frac{l^r}{r} + \frac{rl^r}{\pi^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} (-1)^n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

حال اگر در این تساوی چنین قرار دهیم $l = \pi$ و $x = \pi$ می یابیم

$$\pi^r = \frac{\pi^r}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{n^r}$$

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \dots = \frac{\pi^r}{r}$$

حال اگر قرار دهیم $l = \pi$ و $x = 0$ داریم

$$1 - \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} - \frac{1}{4^r} + \dots = \frac{\pi^r}{12}$$

مثال ۷. سری فوریه تابع $f(x) = \sin px$ ؛ $0 < x < 1$ ، $p = 1$ را بیابید.

$$a_n = r \int_0^1 \sin px \cos r n \pi x dx = \int_0^1 [\sin(rn + 1)\pi x - \sin(rn - 1)\pi x] dx$$

(۲۶) سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{(2n+1)} \cos(2n+1)\pi + \frac{1}{(2n-1)} \cos(2n-1)\pi + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] =$$

$$\frac{-4}{\pi} \times \frac{1}{4n^2-1}$$

$a_n = \frac{4}{\pi}$ و می توان ثابت کرد $b_n = 0$ بنابراین

$$f(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos n\pi x$$

مثال ۸ سری فوریه تابع $f(x) = x^r$; $-2 < x < 2$ را بیابید.

$a_n = 0$ و

$$b_n = \int_0^1 x^r \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \left[-\frac{x^r}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^1 + \frac{r}{n\pi} \int_0^1 x^{r-1} \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{16(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{r}{n\pi} \left[-\frac{r}{n\pi} \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right] = \frac{16(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{96(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{16n^2\pi^2 - 96}{n^2\pi^2}$$

بنابراین

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{16n^2\pi^2 - 96}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

مثال ۹ سری فوریه تابع $f(x) = e^{-x}$; $0 < x < 2\pi$ را بیابید.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos nx dx = \frac{1}{\pi(n^2+1)} [e^{-x} (-\cos nx + n \sin nx)]_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{1 - e^{-\gamma\pi}}{\pi} \right) \frac{1}{n^{\gamma} + 1} ; a_n = \frac{1 - e^{-\gamma\pi}}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\gamma\pi} e^{-x} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi(n^{\gamma} + 1)} [e^{-x} (-\sin nx + n \cos nx)]_0^{\gamma\pi}$$

$$= \frac{1 - e^{-\gamma\pi}}{\pi} \cdot \frac{n}{n^{\gamma} + 1}$$



بنابراین

$$e^{-x} = \frac{1 - e^{-\gamma\pi}}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \cos x + \frac{1}{\gamma^2} \cos 2x + \frac{1}{\gamma^3} \cos 3x + \dots \right) + \left(\frac{1}{\gamma} \sin x + \frac{2}{\gamma^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. \sin 2x + \frac{3}{\gamma^2} \sin 3x + \dots \right) \right\}$$

مثال ۱۰. سری فوریه سینوسی تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x ; & 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4} ; & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

رایباید.

$$b_n = \gamma \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

$$= \gamma \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x \right) \sin n\pi x \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{3}{4} \right) \sin n\pi x \, dx \right]$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^1 -\left(\frac{1}{4} - x\right) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} - \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2} \Big|_{\frac{1}{4}}^1 + \int_{\frac{3}{4}}^1 -\left(x - \frac{3}{4}\right) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} - \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2} \Big|_{\frac{3}{4}}^1$$

$$= \frac{1}{2n\pi} [1 - (-1)^n] - \frac{4 \sin n\pi/4}{n^2\pi^2}$$

بنابراین

$$f(x) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) \sin \pi x + \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{4}{\pi^2}\right) \sin 3\pi x + \left(\frac{1}{5\pi} - \frac{4}{5^2\pi^2}\right) \sin 5\pi x + \dots$$

مثال ۱۱. سری فوریه کسینوسی تابع $0 < x < \pi$ را بیابید.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 3x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin 3x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{3}{n} \int_0^{\pi} \cos 3x \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{-6}{n\pi} \left[\frac{-\cos 3x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{3}{n} \frac{\pi}{2} a_n \right] = \frac{-6}{\pi n^2} [1 + (-1)^n] + \frac{9}{n^2} a_n$$

$$a_n = \frac{6}{\pi(9-n^2)} (1 + (-1)^n) ; n \neq 3$$

$$a_3 = 0 ; a_0 = \frac{4}{3\pi}$$

$$f(x) = \frac{4}{3\pi} + \sum_{n=1, n \neq 3}^{\infty} \frac{6}{\pi(9-n^2)} (1 + (-1)^n) \cos nx$$

مثال ۱۲. صورت مختلط سری فوریه تابع $-\pi < x < \pi$ و $f(x) = \cosh x$ را دست آورید.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh x e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[e^{-inx} \sinh x \Big|_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} \sinh x e^{-inx} \, dx \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \sinh \pi + \frac{in}{2\pi} \int e^{-inx} \cos hx \Big|_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \cosh x dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \sinh \pi + \frac{in(-1)^n \cosh \pi}{\pi} - n^2 c_n$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \sinh \pi + \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} in \cosh \pi$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)} [\sin hx + in \cosh \pi] e^{-inx}$$

مثال ۱۳. صورت مختلط سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; -\pi < x < 0 \\ \cos x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

رایباید.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos x e^{-inx} dx$$

$$= \frac{-1}{2\pi ni} e^{-inx} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{ix} + e^{-ix}) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{-i}{2n\pi} (e^{-in\pi} - 1) + \frac{i}{2\pi} \left[\frac{1}{n-1} e^{in(1-n)} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} e^{-in(1+n)} - \frac{1}{n+1} \right]$$

$$= \frac{i}{2n\pi} (1 - (-1)^n) + \frac{i}{2\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n-1} - \frac{1}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right]$$

(۵۰) سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

$$= \frac{i}{2n\pi} (1 - (-1)^n) + \frac{in}{2\pi} \cdot \frac{((-1)^{n+1} - 1)}{n^2 - 1} ; n \neq 0, 1$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \cos x e^{-ix} dx = \frac{i}{\pi} + \frac{1}{4}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{\pi}^{\pi} \cos x dx = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{i}{\pi} + \frac{1}{4} \right) e^{ix} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0, 1}}^{\infty} i \left[\frac{(1 - (-1)^n)}{n} - \frac{n}{n^2 - 1} ((-1)^{n+1} - 1) \right] e^{inx}$$

مثال ۱۴. با انتگرالگیری از سری فوریه

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = f(x) = \begin{cases} -1 & ; -\pi < x < 0 \\ 1 & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

به سری فوریه تابع $|x|$ برسید. ابتدا از طرفین انتگرال نامعین می‌گیریم:

$$\int \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} dx = \int f(x) dx = \begin{cases} -x & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$c - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \begin{cases} -x & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

با انتگرالگیری از طرفین تساوی فوق در فاصله π تا $-\pi$ می‌یابیم $c = \frac{\pi}{4}$ بنابراین:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \begin{cases} -x & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$$

مثال ۱۵. فرض کنید f و g در فاصله $[-\pi, \pi]$ پیوسته تکه‌ای و متناوب با دوره 2π باشند و (a_n, b_n) و (c_n, d_n) به ترتیب ضرایب فوریه f و g باشند آنگاه ثابت کنید که:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g \, dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n + c_n d_n)$$

چنانچه فرض کنیم $h = f + g$ آنگاه تابع h دارای سری فوریه است. هرگاه A_n و B_n ضرایب فوریه این تابع باشند آنگاه داریم:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g \cos nx \, dx$$

بنابراین

$$A_n = a_n + c_n$$

و همینطور

$$A_n = a_n + c_n \quad \text{و} \quad B_n = b_n + d_n$$

ولی می‌توان ثابت کرد که (تمرین ۱۰)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f' \, dx = \frac{a_1'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' + b_n')$$

که به تساوی پارسوال موسوم است با استفاده از تساوی پارسوال برای f و g و با توجه به اتحاد $(f + g)' = f' + g' + 2fg$ می‌یابیم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f + g)' \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f' \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g' \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg \, dx$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f + g)' dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f' dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g' dx \\ &= \frac{(a_0 + c_0)'}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + c_n)' + (b_n + d_n)'] = -\frac{a_0'}{\gamma} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' + b_n') - \frac{c_0'}{\gamma} - \sum_{n=1}^{\infty} (c_n' + d_n') \\ &= \frac{a_0'}{\gamma} + \frac{c_0'}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' + b_n') + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n' + d_n') + a_0 c_0 \end{aligned}$$

$$+ \gamma \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n) - \frac{a_0'}{\gamma} - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' + b_n') - \frac{c_0'}{\gamma} - \sum_{n=1}^{\infty} (c_n' + d_n')$$

یا

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg dx = \frac{a_0 c_0}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n)$$

مثال ۱۶. تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & ; x > \pi \end{cases}$$

را به صورت یک انتگرال سینوسی فوریه بنویسید و با توجه به آن انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi x}{x} \sin \pi x dx$$

را محاسبه کنید.

$$b(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin wx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos wx}{w} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\gamma}{\pi} \frac{1 - \cos w\pi}{w}$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos w\pi}{w} \sin wx \, dx$$

و به ازای $x = \pi$ داریم.

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos w\pi}{w} \sin w\pi \, dw = \frac{\pi}{\gamma} [f(\pi^-) + f(\pi^+)] = \frac{\pi}{\gamma}$$

با تغییر w به x می‌یابیم:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi x}{x} \sin \pi x \, dx = \frac{\pi}{\gamma}$$

مثال ۱۷. تبدیل فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$$

را بیابید و با توجه به آن $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ را محاسبه کنید

$$\bar{f}(w) = F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-iwx} \, dx = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{\sqrt{2\pi} iw} = \gamma \frac{\sin w}{\sqrt{2\pi} w}; w \neq 0$$

و به ازای $w = 0$ داریم $\bar{f}\{w\} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}$ حال با استفاده از فرمول تبدیل معکوس

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w) e^{iwx} dw$$

داریم

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \sin w}{w} e^{iwx} dw = \begin{cases} 1 & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$$

با قرار دادن $x=0$ نتیجه می شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \pi \quad \text{و یا} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۱۸. به ازای هر عدد طبیعی n نشان دهید که $F\left\{\frac{d^n u}{dx^n}\right\} = (iw)^n F\{u\}$

به ازای هر تابع u داریم

$$F\{u\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iwx} dx, \quad F\{u'\} = iwF\{u\}$$

و به استقرا می توان ثابت کرد $F\{u^{(n)}\} = iw F\{u'\} = (iw)^n F\{u\}$

$$F\{u^{(n)}\} = (iw)^n F\{u\}$$

مثال ۱۹. نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx + w \sin wx}{1+w^2} dw = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; x = 0 \\ \pi e^{-x} & ; x > 0 \end{cases}$$

تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \pi e^{-x} & ; x > 0 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم و انتگرال فوریه آن را می‌یابیم

$$a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi e^{-x} \cos wx \, dx = \left[\frac{e^{-x}}{1+w^2} (-\cos wx + w \sin wx) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{1+w^2}$$

یا

$$a(w) = \frac{1}{1+w^2}$$

$$b(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi e^{-x} \sin wx \, dx = \left[\frac{e^{-x}}{1+w^2} (-\sin wx - w \cos wx) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{w}{1+w^2}$$

و از آنجا داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos wx}{1+w^2} + \frac{w}{1+w^2} \sin wx \right) dw = \frac{1}{\gamma} [f(x+) + f(x-)] = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{\pi}{\gamma} & ; x = 0 \\ \pi e^{-x} & ; x > 0 \end{cases}$$

۷.۱. تمرینات

۱. کدامیک از توابع زیر در فاصله‌های داده شده پیوسته تکه‌ای هستند.

$$a) f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 0 & ; -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2 & ; 0 \leq x < 1 \\ x^2 & ; 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 1-x & ; -1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{2-x} & ; 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

۲. کدامیک از توابع زیر زوج، فرد، یا نه زوج و نه فرد هستند.

$$a) x + 2x^2 + 3x^3, \quad x \ln x, \quad \frac{1}{x}, \quad \sinh x, \quad e^x, \quad e^{|x|}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x; & -\pi < x < 0 \\ -x; & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 0; & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x; & -\frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -x^2; & -\pi < x < 0 \\ x^2; & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$e) f(x) = |x|; \quad 0 < x < 2\pi$$

۳. هرگاه $f(x)$ متناوب و با دوره p باشد آنگاه نشان دهید که

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(x) dx$$

و از آنجا

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_a^{a+l} f(x) dx$$

۴. سری فوریه هر یک از توابع زیر را بیابید.

a) $f(x) = x + \sin x \quad -\pi < x < \pi$, $f(x) = \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$. جواب.

جواب.

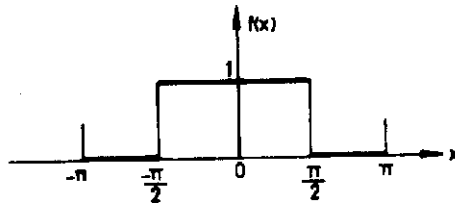
b)
$$\begin{cases} f(x) = \sin \frac{\pi x}{l}; & 0 < x < l \\ f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2} \cos \frac{n\pi}{l} x \end{cases}$$

 $f(x) = f(-x) ; \quad -l < x < 0$

جواب.

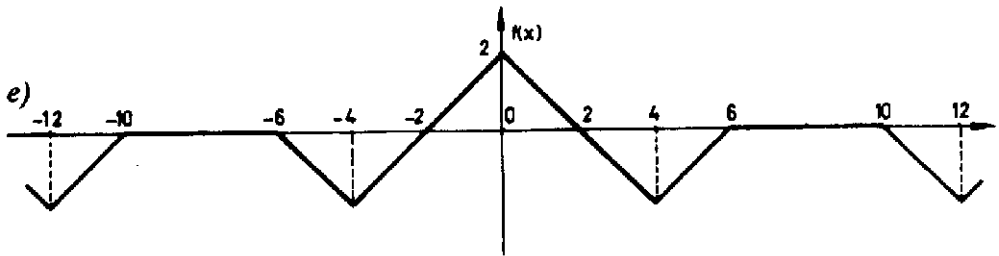
c) $f(x) = \sinh x; \quad -1 < x < 1$, $f(x) = 2\pi \sinh 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + n^2 \pi^2} (-1)^{n+1} \sin n\pi x$

d)



$$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - + \dots \right) \quad \text{جواب.}$$

e)



$$f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2\cos(n\pi/2) + \cos(3n\pi/2)}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{4} \quad \text{جواب.}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; -1 < x < 0 \\ -x & ; 0 < x < 1 \end{cases} \quad , p=2$$

جواب.

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} (\cos \pi x + \frac{1}{3^2} \cos 3\pi x + \dots) - \frac{1}{\pi} (2 \sin \pi x - \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \dots)$$

۵- با بکار بردن سری فوریه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

نشان دهید که

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

۶- سری فوریه کسینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a) f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 < x < \frac{l}{2} \\ 1 & ; \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right) \quad \text{جواب.}$$

$$b) f(x) = \sin \frac{\pi x}{l}; \quad 0 < x < l$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3 \times 5} \cos \frac{4\pi x}{l} + \dots \right) \quad \text{جواب.}$$

$$c) f(x) = \sin x; \quad 0 < x < \pi$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1} + \frac{\cos 2x}{1-2^2} + \frac{\cos 4x}{1-4^2} + \dots \right) \quad \text{جواب.}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x \leq 1 \\ 2-x & ; 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2} \quad \text{جواب.}$$

۷- سری فوریه سینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$a) f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < \frac{l}{2} \\ l-x & ; \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

جواب.

$$f(x) = \frac{2l}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 1 \\ 2-x & ; 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)}{(2n+1)^2} \quad \text{جواب.}$$

$$c) f(x) = \cos 2x \quad 0 < x < \pi$$

جواب.

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin x}{2^2-1} + \frac{2\sin 3x}{2^2-3^2} + \frac{5\sin 5x}{2^2-5^2} + \dots \right]$$

$$d) f(x) = x^2 \quad 0 < x < \pi$$

جواب.

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx$$

۸- هرگاه $f(x) = \cos \mu x$; $-\pi < x < \pi$ که در آن μ عددی غیر صحیح است آنگاه نشان دهید که

$$f(x) = -\frac{\mu}{\pi} \sin \mu \pi \left\{ \frac{1}{\mu^2} + \frac{\cos x}{1-\mu^2} - \frac{\cos 3x}{3^2-\mu^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n^2-\mu^2} + \dots \right\}$$

و از آنجا استنتاج کنید

(۶۰) سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

$$\cot \mu \pi = \frac{\gamma \mu}{\pi} \left\{ \frac{1}{\gamma \mu^2} + \frac{1}{\mu^2-1} + \frac{1}{\mu^2-\gamma^2} + \dots + \frac{1}{\mu^2-n^2} + \dots \right\}$$

همچنین نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi \sqrt{3}}{18}$$

۹- ثابت کنید که به ازای $-\pi < x \leq \pi$

$$\sin ax = \frac{\gamma \sin a\pi}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1^2-a^2} - \frac{\gamma \sin \gamma x}{\gamma^2-a^2} + \frac{\gamma \sin \gamma^2 x}{\gamma^2-a^2} - \dots \right) \quad (\text{الف})$$

که در آن a عددی است غیر صحیح
(ب)

$$x \cos x = -\frac{1}{\gamma} \sin x + \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2-1} \sin nx$$

۱۰- ثابت کنید که (فرمول پارسوال)

$$\int_{-l}^l [f(x)]^{\gamma} dx = l \left\{ \frac{a_{\gamma}}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\gamma} + b_n^{\gamma}) \right\}$$

در این فرمول a_n و b_n ضرایب اویلر سری فوریه تابع $f(x)$ هستند.

۱۱- ثابت کنید که

$$\text{Ln}(\gamma \sin \frac{x}{\gamma}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} ; \quad 0 < x < \pi$$

و

$$\text{Ln}(\gamma \cos \frac{x}{\gamma}) = \sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n} ; \quad -\pi < x < \pi$$

۱۲- سری فوریه دوگانه هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$a) f(x,y) = x^{\gamma} y^{\gamma} ; \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

$$f(x,y) = \frac{\pi^{\gamma}}{4} + \frac{\Lambda \pi^{\gamma}}{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^{\gamma}} \cos mx + \frac{\Lambda \pi^{\gamma}}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\gamma}} \cos ny$$

جواب .

$$+ ۱۶ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m^n n^r} \cos mx \cos ny$$

b) $f(x,y) = x \sin y ; -\pi < x < \pi , -\pi < y < \pi$

جواب .

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{m} \sin mx \sin y$$

۱۳ - هر یک از توابع زیر را به صورت یک سری فوريه دوگانه سینوسی بنویسید.

a) $f(x,y) = xy ; 0 < x < a , 0 < y < a$

جواب .

$$f(x,y) = \frac{4a^r}{\pi^r} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

b) $f(x,y) = xy (a-x) (b-y) ; 0 < x < a , 0 < y < b$

جواب .

$$f(x,y) = \frac{64a^r b^r}{\pi^r} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^r n^r} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

c) $f(x,y) = xy (a^1 - x^1) (b^1 - y^1) ; 0 < x < a , 0 < y < b$

جواب .

$$f(x,y) = \frac{144a^r b^r}{\pi^r} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m^r n^r} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

۱۴ - انتگرال فوريه هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a) f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < a \\ 0 & ; x > a \end{cases} , f(-x) = f(x)$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{a \sin aw}{w} + \frac{\cos aw - 1}{w^2} \right] \cos wx \, dw \quad \text{جواب .}$$

$$b) \quad \begin{cases} f(x) = e^{-x} + e^{-x} ; & x > 0 \\ f(-x) = f(x) \end{cases}, \quad f(x) = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma + w^2}{\gamma + \Delta w^2 + w^2} \cos wx \, dw \quad \text{جواب .}$$

$$c) \quad \begin{cases} f(x) = \begin{cases} x^\gamma ; & 0 < x < a \\ 0 ; & x > a \end{cases} \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \quad \text{جواب .}$$

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \left[(a^\gamma - \frac{\gamma}{w^\gamma}) \sin aw + \frac{\gamma a}{w} \cos aw \right] \frac{\cos wx}{w} \, dw$$

۱۵ - هرگاه $f(-x) = f(x)$ آنگاه ثابت کنید که

$$a) f(bx) = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} a \left(\frac{w}{b} \right) \cos wx \, dw ; \quad b > 0$$

$$b) x^\gamma f(x) = \int_0^{\infty} a^*(w) \cos wx \, dw, \quad a^* = - \frac{d^\gamma a}{dw^\gamma}$$

۱۶ - ثابت کنید که

$$a) \int_0^{\infty} \frac{w^\gamma \sin wx}{w^\gamma + \gamma} \, dw = \frac{\pi}{\gamma} e^{-x} \cos x ; \quad x > 0, \quad f(x) = -f(-x) ; \quad x < 0$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{\cos(w \frac{\pi}{\gamma}) \cos wx}{1 - w^\gamma} \, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{\gamma} \cos x ; & |x| < \frac{\pi}{\gamma} \\ 0 ; & |x| > \frac{\pi}{\gamma} \end{cases}$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{\sin w \cos wx}{w} \, dw = \begin{cases} \frac{x}{\gamma}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{\gamma}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = f(-x) ; -\infty < x < \infty$$

۱۷ - سری فوریه مختلط هر یک از توابع زیر را بیابید و به کمک آن سری فوریه حقیقی متناظر با آنها را معین کنید.

a) $f(x) = e^{-x} ; -\pi < x < \pi ; f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma + in}{\gamma + n^2} (-1)^n \sinh \gamma \pi e^{inx}$. جواب.

b) $f(x) = x ; -\pi < x < \pi ; f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{i}{n} e^{inx}$. جواب.

۱۸ - انتگرال فوریه مختلط هر یک از توابع زیر را بیابید و به کمک آن انتگرال فوریه حقیقی آنها را معین کنید.

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-ix} ; & -\pi < x < \pi \\ 0 & ; \text{جا های دیگر} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sinh \gamma x ; & 0 < x < \gamma \\ 0 & ; \text{جا های دیگر} \end{cases}$

۱۹ - آیا تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه تابع $f(x) = e^x$ موجود است؟

۲۰ - نشان دهید که تابع $f(x) = 1$ دارای تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه نیست.

۲۱ - $F_s\{e^{-ax}\} ; a > 0$ را با انتگرالگیری به دست آورید.

۲۲ - تبدیل کسینوسی فوریه معکوس تابع e^{-w} را بیابید.

۲۳ - $F_s^{-1}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w} \cos w\pi\right)$ را بیابید.

۲۴ - آیا تبدیل کسینوسی فوریه تابع $\frac{\sin x}{x}$ یا $\frac{\cos x}{x}$ موجود است؟

۲۵ - تبدیل فوریه هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از جدول تبدیلات فوریه به دست آورید.

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} ; & x > 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^x ; & x > 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$

$$c) f(x) = \begin{cases} e^{ix} & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| \geq 1 \end{cases} \quad d) f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < a \\ 0 & ; \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۲۶- نشان دهید که اگر $f(x)$ دارای تبدیل فوریه باشد $f(x-a)$ نیز دارای تبدیل فوریه است و

$$F\{f(x-a)\} = e^{-iwa} F\{f(x)\}$$

۲۷- نشان دهید که اگر $\tilde{f}(w)$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد آنگاه $\tilde{f}(w-a)$ تبدیل فوریه $e^{iax} f(x)$ است.

۲۸- انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| \leq 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$ را بیابید و به کمک آن انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} dx$$

را به ازای مقادیر گوناگون a محاسبه کنید.

۲۹- به کمک انتگرال فوریه نشان دهید که

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, a > 0.$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, a \geq 0.$$

۳۰- تبدیلات فوریه هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| \leq \pi \\ 0 & ; |x| > \pi \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x^2 & ; |x| < x_0 \\ 0 & ; |x| > x_0 \end{cases}$$

۳۱- تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$ را به دست آورید و به کمک آن

$$\int_0^{\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} dx$$

را محاسبه کنید.

۳۲- تبدیلات فوریه کسینوسی و سینوسی هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0 & ; x \geq 1 \end{cases} \quad b) f(x) = e^{-ax} \quad (a > 0)$$

۳۳- تبدیل فوریه سینوسی تابع $e^{-|x|}$ را به دست آورید و به کمک آن $\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx$

را محاسبه کنید.

۳۴- چنانچه $f(x)$ تابعی پیوسته تکه‌ای در فاصله $[-\pi, \pi]$ و متناوب با دوره 2π باشد آنگاه ثابت کنید که توابع زیر نیز دارای چنین خاصیتی هستند

$$f(w+x) = \frac{\sin \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) (w+x) \right\}}{2 \sin \left(\frac{w}{2} \right)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

۳۵- تابع f در نقطه x در شرط لیب شیتز از مرتبه α صدق می‌کند هرگاه اعداد مثبت M و δ موجود باشند به طوری که

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M |x - x_0|^\alpha$$

مشروط به اینکه $\delta < |x - x_0|$. ثابت کنید که اگر f پیوسته بوده و در شرط لیب شیتز در x_0 صدق کند آنگاه سری فوریه f به سمت $f(x_0)$ همگراست.

۸.۱ تمرینات متفرقه

۱. به هر یک از سؤالات زیر پاسخ دهید

a. هرگاه f تابعی هم فرد و هم زوج باشد آنگاه f متحد با صفر است.

b. هرگاه f تابعی پیوسته و فرد باشد آنگاه $f(0) = 0$

c. اگر f تابعی زوج باشد آنگاه

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

و $f'(x)$ توابعی فرد هستند.

e. هرگاه f زوج، g فرد و $f+g=0$ ، $f(x)=0$ ، $g(x)=0$ ، f و g آنگاه $f+g=0$

۲. هرگاه f متناوب و با دوره p باشد آنگاه f تابعی متناوب است و همچنین تابع $\int_0^x f(t) dt$

فقط و فقط وقتی متناوب است که اگر $\int_0^p f(t) dt = 0$

۳. هرگاه a_n, b_n ضرایب فوریه تابع $f(x)$ باشند آنگاه ضرایب فوریه تابع $f(x-a)$ را بیابید.

۴ - تابع زیتای ریمن به صورت زیر تعریف می شود

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}; p > 1$$

با توجه به اینکه

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

نشان دهید که

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}; p > 1$$

۵. هرگاه $p(x)$ یک چند جمله ای زوج (یعنی فقط شامل توانهای زوج x) بر فاصله $[-l, l]$

باشد. آنگاه a_n ضرایب کسینوسی، $p(x)$ به ازای $n \geq 1$ برابر است با

$$a_n = \frac{2l}{n^2 \pi^2} (-1)^n \left\{ p'(l) - \frac{l^2}{n^2 \pi^2} p''(l) + \frac{l^4}{n^4 \pi^4} p^{(4)}(l) - \dots \right\}$$

و در صورت فرد بودن $p(x)$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} (-1)^n \left\{ p(l) - \frac{l^2}{n^2 \pi^2} p''(l) + \frac{l^4}{n^4 \pi^4} p^{(4)}(l) - \dots \right\}$$

۶. در یک سری فوریه نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

۷. نشان دهید که

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi+x); & -\pi < x < 0 \\ -\frac{1}{2}(\pi-x); & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$b. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma n+1} \cos(\gamma n+1)x = \frac{1}{\gamma} \ln \left\{ \cot \frac{|x|}{\gamma} \right\}; -\pi < x < \pi$$

$$f(x) = x^\gamma; \quad -\pi < x < \pi$$

۸. با استفاده از تابع

نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma} = \frac{\pi^\gamma}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\gamma} = \frac{\sqrt{\pi}^\gamma}{\sqrt{20}}$$

۹. به کمک تمرین ۸ بخش قبل نشان دهید که

$$\mu\pi \cot \mu\pi = 1 - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(\gamma n) \mu^{-n}$$

معادلات با مشتقات جزئی

معادلات ریاضی فیزیک

۱.۲. مقدمه

هر معادله از x ، y و u و مشتقات جزئی u نسبت به x و y به یک معادله با مشتق جزئی موسوم است. در بحث مربوط به معادلات با مشتقات جزئی بنا نداریم به بررسی انواع مختلف این گونه معادلات پردازیم بلکه دسته خاصی از این نوع معادلات را که به معادلات ریاضی فیزیک موسوم اند مورد بررسی قرار می‌دهیم، گرچه در بین مسائل خود ممکن است دسته‌های دیگری از معادلات را نیز مورد بحث قرار دهیم. معادلات ریاضی فیزیک اصولاً نوعی معادلات خطی یا شبه خطی از مرتبه دوم هستند. منظور از یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی مرتبه دوم معادله‌ای است که نسبت به u و مشتقات جزئی آن خطی باشد. معادلات شبه خطی بیشتر مورد توجه ما هستند. این گونه معادلات تنها نسبت به مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی هستند. یک معادله شبه خطی در فضای دو بعدی را می‌توان چنین تعریف کرد.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1)$$

که در آن A ، B و C توابعی از x و y هستند. دسته‌های خاصی از معادلات شبه خطی که در مسائل کاربردی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده و به معادلات ریاضی فیزیک موسوم اند عبارت‌اند از:

(۲) معادله موج $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$

(۳) معادله گرما $u_t = c^2 \nabla^2 u$

(۴) معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$

(۵) معادله پواسن $\nabla^2 u = f(x, y, z)$

(۶) معادله هلمهولتز $\nabla^2 u + ku = 0$

که در آن

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}, \quad \nabla^2 u = u_{xx}$$

به ترتیب در حالت‌های یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی است.

در این فصل بنا داریم که هر یک از این معادلات را در برخی از حالات خاص مورد بحث و بررسی قرار دهیم ولی قبل از بررسی این معادلات مجدداً به معادله (۱) بر می‌گردیم. معادله (۱) را به ازای $AC - B^2 > 0$ ، $AC - B^2 = 0$ و $AC - B^2 < 0$ به ترتیب بیضی‌گون، سهمی‌گون، و هذلولی‌گون می‌نامند. مثلاً در حالت یک بعدی معادله موج یک معادله هذلولی‌گون، معادله گرما یک معادله سهمی‌گون و معادله لاپلاس در حالت دو بعدی یک معادله بیضی‌گون است.

در ریاضیات مهندسی ما اغلب اوقات به حل مسائل شامل معادلات با مشتقات جزئی می‌پردازیم و منظور از یک مسئله در معادلات با مشتقات جزئی یافتن جوابی برای یک معادله با مشتق جزئی است که در برخی شرایط فیزیکی مفروض صدق کند. شرایط فیزیکی اصولاً طوری انتخاب می‌شوند که نتیجه حل مسئله به جوابی یکتا منجر شود.

جواب برخی معادلات همچون جواب معادله موج با شناخت u روی کرانه D و مقدار اولیه u و سرعت آن در لحظه اولیه به طور یکتا در داخل D مشخص می‌شوند چنین مسائلی را مسائل با مقدار اولیه و کرانه‌ای می‌نامند. مسائلی که جواب معادله با مشخص بودن مقدار u بر کرانه D یا مشتق u در امتداد قائم بر کرانه D به طور یکتا در داخل D مشخص شود به مسائل مقدار کرانه‌ای موسوم‌اند مثلاً مسئله لاپلاس مسئله‌ای از این نوع است. البته مسائلی

نیز موجودند که جواب معادله آنها تنها با شناخت مقدار اولیه جواب مشخص می شوند چنین مسائلی به مسائل مقدار اولیه موسوم اند.

در ذیل ما نخست به بررسی مسائل با مقادیر اولیه و کرانه‌ای شامل معادلات موج و گرما می پردازیم و سپس مسائل با مقدار کرانه‌ای شامل معادلات لاپلاس و پواسن را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم. حل مسائل در حالت یک بعدی که در بخش ۳.۲ ارائه می شوند به سادگی در حالات دو بعدی و سه بعدی قابل تعمیم هستند.

۲.۲. تمرینات

برخی از معادلات با مشتقات جزئی را می توان به کمک روشهای ارائه شده در معادلات دیفرانسیل حل نمود مثلاً جواب $u_y = 0$ عبارت است از $u = f(x)$ و همینطور با دو بار

$$u_{yy} = 0 \text{ می یابیم } u = y f(x) + g(x)$$

هر یک از معادلات زیر را به کمک روشهای ارائه شده برای معادلات دیفرانسیل معمولی حل کنید.

۱. $u_x = 0$, $u = f(y)$ جواب.

۲. $u_{xx} = 0$, $u = x f(y) + g(y)$ جواب.

۳. $u_{xx} + u_x - 2u = 0$, $u = f(y)e^x + g(y)e^{-2x}$ جواب.

۴. $u_{yy} + u = 0$, $u = f(x)\cos y + g(x)\sin y$ جواب.

۵. $u_{xy} + u_x = 0$, $u = f(x)e^y + g(y)$ جواب.

۶. $u_{xy} + u_x - x + y^2 = 0$, $u = f(x)e^y + g(y) + \frac{1}{4}x^2 - xy^2$ جواب.

۷. $u_x = 0$, $u_y = 0$. $u = c$ جواب.

۸. $u_{yy} + 3u_y - 4u = 8$, $u = f(x)e^{-2y} + g(x)e^y - 2$ جواب.

۹. $u_{xx} = 0$, $u_{xy} = 0$, $u_{yy} = 0$, $u = ax + by + c$ جواب.

۳.۲. مسائل با مقادیر اولیه و کرانه‌ای، حل مسأله موج در فضای یک بعدی، مسئله نخ مرتعش

می‌توان نشان داد که به ازای داده‌های F, f, g و h که در شرایط معینی صدق می‌کنند مسئله با مقادیر اولیه و کرانه‌ای زیر دارای جوابی یکتا است

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t); \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (1a)$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq l \quad (1b)$$

$$u_t(x, 0) = g(x); \quad 0 \leq x \leq l \quad (1c)$$

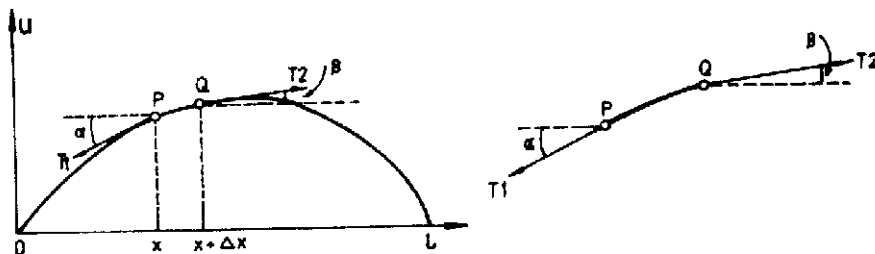
$$u(0, t) = p(t); \quad t \geq 0. \quad (1d)$$

$$u(l, t) = q(t); \quad t \geq 0. \quad (1e)$$

نخست یک مسئله فیزیکی را مدلسازی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که ارتعاش یک نخ در مسئله فوق صدق می‌کند. با فرض اینکه مسئله فوق دارای جواب بوده و جواب آن یکتاست به چگونگی نمایش جواب آن می‌پردازیم.

نخی به طول l را که دو انتهای آن ثابت است در نظر می‌گیریم و آن را از وضع تعادل خارج کرده و ارتعاشات آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم یعنی می‌خواهیم ببینیم پس از تغییر اولیه در وضعیت نخ و رها کردن آن در هر لحظه نخ در چه وضعیتی قرار دارد. برای این منظور لازم است نخ کاملاً کشسان بوده و جرم نخ در واحد طول ثابت و در مقابل نیروی کشش کوچک باشد و حرکت نخ یک ارتعاش کوچک عرضی در یک صفحه در امتداد قائم و هیچ‌گونه حرکتی در جهت افقی صورت نگیرد. فرض می‌کنیم نخ در فاصله $0 < x < l$ در طول محور x باشد. هم اکنون نخ را از وضعیت تعادل خود خارج کرده و در لحظه‌ای که لحظه اولیه $t = 0$ می‌نامیم نخ را با وضعیت معین و با سرعت مشخص می‌گیریم. برای بررسی وضعیت حرکت یک نخ بدیهی است که حرکت هر نقطه از نخ به x ، طول آن نقطه، و زمان حرکت t بستگی دارد بنابراین u ، ارتفاع یک نقطه از نخ، به صورت $u(x, t)$ یعنی تابعی از x و t خواهد بود.

چنانچه منحنی C وضعیت نخ در لحظه t باشد آنگاه برای پیدا کردن معادله حرکت نخ، دو نقطه بسیار نزدیک از نخ به طولهای x و $x + \Delta x$ را در نظر می‌گیریم.



هرگاه نیروهای کشش با مقادیر T_1 و T_2 به ترتیب در نقاط x و $x + \Delta x$ بر نخ وارد شوند آنگاه به علت عدم وجود حرکت در امتداد افق، تصویر نیروی کشش در طول محور x دارای اندازه ثابت $T_1 \cos \beta = T_2 \cos \alpha = T$ است و نیروی محرکه در امتداد قائم که بر اثر نیروی کشش ایجاد می‌گردد برابر

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha$$

است چنانچه فرض کنیم علاوه بر نیروی قائم فوق نیروی ثابتی در امتداد قائم وارد شود و اگر اندازه این نیرو بر واحد طول، در نقطه x برابر p باشد آنگاه اندازه نیرو بر طول Δx برابر $p \Delta x$ خواهد بود. بنابراین نیروی محرکه بر نخ که سبب حرکت آن می‌گردد برابر است با

$$F = T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha + p \Delta x$$

از طرفی طبق قانون دوم نیوتن مقدار نیرو با حاصلضرب جرم جسم در شتاب متحرک برابر است بنابراین می‌بایم

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha + p \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر T نتیجه می‌گیریم

$$\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha + \frac{p}{T} \Delta x = \frac{\rho}{T} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم طرفین تساوی فوق بر Δx و با توجه به اینکه $\text{tg } \alpha$ و $\text{tg } \beta$ به ترتیب برابر ضریب

زاویه‌های خطوط مماس در نقاط x و $x + \Delta x$ است می‌یابیم:

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + \frac{p}{T} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حال چنانچه Δx به سمت صفر میل کند داریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{p}{T} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با تقسیم کردن طرفین این تساوی بر ρ/T فرض $c^2 = \frac{T}{\rho}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{p}{\rho} \quad (۱)$$

هرگاه ارتعاش و سرعت اولیه به ترتیب برابر $f(x)$ و $g(x)$ باشند آنگاه با توجه به اینکه نخ در نقاط $x=0$ و $x=l$ دارای ارتعاشی نیست داریم.

$$u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq l \quad (۲)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq l \quad (۳)$$

$$u(0, t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0 \quad (۴)$$

$$u(l, t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0 \quad (۵)$$

معادله (۱) با شرایط (۲) تا (۵) یک نمونه فیزیکی برای مسئله (۱) می‌باشد.

هم اکنون به حل مسئله (۱) در حالتی خاص می‌پردازیم و مسئله زیر را حل می‌کنیم

$$u_{xx} = c^2 u_{tt} \quad ; \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (۲a)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq l, \quad (۲b)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq l, \quad (۲c)$$

$$u(0, t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0 \quad (۲d)$$

$$u(l, t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0 \quad (۲e)$$

این مسئله را مسئله (۲) می‌نامیم و برای حل این مسئله روش ضربی یا روش تفکیک متغیرها را که حاصل تلاشهای اولر در مدلسازی و حل مسئله موج است ارائه می‌کنیم. برای حل مسئله از خاصیت وجود و یکتایی جواب استفاده می‌کنیم یعنی به جای حل معادله (۲a) در حالت کلی و رسیدن به یک جواب عمومی برای این معادله کوشش می‌کنیم جوابی

خصوصی برای معادله (۲a) را طوری بیابیم که در شرایط (۲b) تا (۲e) صدق کند. بدیهی است که این جواب با توجه به یکتا بودن جواب برای مسئله (۱) تنها جواب مسئله (۲) خواهد بود.

برای حل مسئله (۲) به جستجوی جوابی به صورت $G(t) = F(x)u(x,t)$ برای مسئله می‌پردازیم یعنی $F(x)$ و $G(t)$ را طوری می‌یابیم که حاصلضرب آنها در مسئله صدق کند با جایگزینی $u = FG$ و $u_u = F\ddot{G}$ و $u_{xx} = F''G$ در معادله می‌یابیم.

$$F\ddot{G} = c^2 F''G$$

و از آنجا

$$\frac{F''}{F} = \frac{\ddot{G}}{c^2 G}$$

نظر به اینکه طرف اول این تساوی تنها تابعی از x و طرف دوم تنها تابعی از t است تساوی فوق فقط وقتی می‌تواند برقرار باشد که عدد ثابتی مانند k موجود باشد که هر یک از نسبت‌های موجود در این تساوی با آن برابر باشند یعنی داشته باشیم

$$\frac{F''}{F} = \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = k,$$

و از آنجا به دو معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$F'' - kF = 0, \quad \ddot{G} - kc^2 G = 0.$$

حال با توجه به شرط (۲b) داریم

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0,$$

بدیهی است که $G(t) \neq 0$ زیرا $G(t) = 0$ منجر به جواب بدیهی $u = 0$ می‌شود که با فرض وجود ارتعاش اولیه تناقض دارد، بنابراین لازم است که $F(0) = 0$ همینطور با توجه به شرط $u(l,t) = 0$ داریم $F(l) = 0$ هم اکنون مسئله زیر را

$$F'' - kF = 0; \quad F(0) = 0, \quad F(l) = 0$$

به ازای مقادیر مختلف k مورد بررسی قرار می‌دهیم. هرگاه $k = 0$ آنگاه داریم $F'' = 0$ که دارای جواب عمومی $F(x) = ax + b$ است. با توجه به شرایط $F(0) = 0$ و $F(l) = 0$ می‌یابیم

$F=0$ و از آنجا $u=0$ که خلاف فرض وجود جواب غیر بدیهی برای مسئله است. بنابراین $k=0$ منجر به جوابی برای مسئله نمی شود.

حال فرض می کنیم $k=\mu^2 > 0$ آنگاه جواب عمومی معادله $F''-kF=0$ به صورت $F(x)=a \cosh \mu x + b \sinh \mu x$ می باشد. با توجه به شرط $F(0)=0$ داریم $a=0$ و از آنجا $F(x)=b \sinh \mu x$ شرط $F(l)=0$ نتیجه می دهد $b \sinh \mu l=0$ و چون μ و l هر دو مخالف صفر هستند بنابراین $b=0$ و از آنجا $F=0$ بنابراین تنها امکان حل مسئله جستجوی مقادیر منفی برای k است. برای این منظور قرار می دهیم $k=-p^2 < 0$ و از آنجا داریم $F''+p^2F=0$ که دارای جواب عمومی $F(x)=A \cos px + B \sin px$ است. با توجه به فرض $F(0)=0$ می یابیم $A=0$ و از آنجا $F=B \sin px$ حال بنا بر فرض $F(l)=0$ به دست می آوریم $B \sin pl=0$ ، برای اینکه مسئله دارای جواب $F \neq 0$ باشد، لازم است که $B \neq 0$ و بنابراین p را باید طوری انتخاب کرد که $\sin pl=0$ با انتخاب $p = \frac{n\pi}{l}$ و به ازای هر عدد صحیح n مقدار $\sin pl=0$ برابر صفر خواهد شد و بنابراین لازم نیست مقدار B برابر صفر باشد و از آنجا به جوابی به صورت

$$F_n(x) = B \sin \frac{n\pi}{l} x$$

می رسمیم با جایگزین کردن $k = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ در معادله $G-kc^2G=0$ و قرار دادن $\lambda_n^2 = c^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ در نتیجه حاصل به معادله زیر برای متغیر t می رسمیم.

$$G'' + \lambda_n^2 G = 0; \quad \lambda_n = c \frac{n\pi}{l}$$

این معادله دارای جواب عمومی

$$G_n(t) = A' \cos \lambda_n t + B' \sin \lambda_n t$$

است و از آنجا

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

که در آن $b_n = B'B$ ، $a_n = A'B$

نظر به اینکه $u_n(x, t)$ به ازای هر عدد طبیعی n جواب مسئله (۲a), (۲d), و (۲e) است، بنابراین مجموع آنها جوابی از مسئله است یعنی

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (۶)$$

نیز جوابی از مسئله است. برای مشخص کردن a_n و b_n از شرایط دیگر مسئله (۲) یعنی از شرایط (۲b) و (۲c) استفاده می‌کنیم. با توجه به شرط $u(x, 0) = f(x)$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

برای برقرار بودن این تساوی لازم است که طرف اول تساوی برابر بسط سینوسی فوریه تابع $f(x)$ باشد و برای این منظور کافی است a_n را برابر ضریب بسط سینوسی فوریه تابع $f(x)$ اختیار کنیم یعنی

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (۷)$$

حال با مشتقگیری از طرفین (۶) و با استفاده از $u_t(x, 0) = g(x)$ می‌یابیم

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x)$$

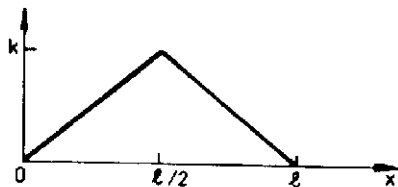
و برای برقرار بودن این تساوی کافی است $b_n \lambda_n$ را برابر ضریب بسط سینوسی فوریه تابع $g(x)$ اختیار کنیم و از آنجا

$$b_n = \frac{2}{l \lambda_n} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (۸)$$

(۷۸) معادلات با مشتقات جزئی

بنابراین مسئله (۲) دارای جوابی به صورت (۶) است که در آن ضرایب a_n و b_n از روی (۷) و (۸) به دست می آیند.

مثال ۱. نخ به طول l را مطابق شکل زیر از وسط به ارتفاع k بالا برده و رهاش ساخته ایم. انحراف این نخ را در هر لحظه مشخص کنید.



$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & ; 0 < x < l/2 \\ \frac{2k}{l}(l-x) & ; l/2 < x < l \end{cases}$$

و سرعت اولیه ارتعاش برابر صفر است

$$u_t(x, 0) = 0$$

بنابراین

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = 0$$

پسرو مثال ۶ بخش ۱.۱ می یابیم

$$a_n = \frac{2k}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

از اینرو با توجه به (۶) داریم

$$u(x, t) = \frac{2k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{l} x$$

حال مجدداً به مسئله (۱) برمی گردیم. برای حل این مسئله به جستجوی جوابی به

صورت

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \quad (9)$$

می پردازیم و $w(x,t)$ را طوری می یابیم که $v(0,t) = 0$ و $v(l,t) = 0$ برای این منظور کافی است $w(x,t)$ را طوری بیابیم که جواب مسئله زیر باشد.

$$w(0,t) = p(t) \quad , \quad w(l,t) = q(t)$$

بدیهی است که این مسئله تنها دارای یک جواب نیست. ولی چون تنها یک جواب مورد نظر است، برای یافتن جوابی برای این مسئله می توان به جستجوی جوابی به صورت

$$w(x,t) = ax + b$$

پرداخت. با توجه به شرط $w(0,t) = p(t)$ می یابیم $b = p(t)$ و از روی شرط

$$w(l,t) = q(t)$$

نتیجه می گیریم

$$a = \frac{1}{l} (q(t) - p(t))$$

بنابراین

$$w(x,t) = \frac{1}{l} (q(t) - p(t))x + p(t)$$

و از آنجا

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{l} (q(t) - p(t))x + p(t) \quad (10)$$

حال مسئله مربوط به v را می یابیم. داریم

$$u_{tt} = v_{tt} + \frac{x}{l} (\ddot{q} - \ddot{p}) + \ddot{p} \quad , \quad u_{xx} = v_{xx}$$

با جایگزین کردن آن در (1a) به دست می آوریم

$$v_{tt} + \frac{x}{l} (\ddot{q} - \ddot{p}) + \ddot{p} - c^2 v_{xx} = F(x,t)$$

و از آنجا $v_{tt} - c^2 v_{xx} = F_1(x,t)$ که در آن

$$F_1(x,t) = F(x,t) - \frac{1}{l} (\ddot{q} - \ddot{p})x - \ddot{p}$$

با توجه به شرط (1b) و (10) می یابیم.

$$u(x,0) = v(x,0) + \frac{1}{l} (q(0) - p(0))x + p(0) = f(x)$$

که از آنجا $v(x, 0) = f_1(x)$ که در آن

$$f_1(x) = f(x) - \frac{1}{l} (q(\cdot) - p(\cdot))x - p(\cdot)$$

همینطور از روی (۱c) و (۱۰) می‌یابیم

$$u_1(x, 0) = v_1(x, 0) + \frac{1}{l} (\dot{q}(\cdot) - \dot{p}(\cdot))x + \dot{p}(\cdot) = g(x)$$

در نتیجه $v_1(x, 0) = g_1(x)$ که در آن

$$g_1(x) = g(x) - \frac{1}{l} (\dot{q}(\cdot) - \dot{p}(\cdot))x - \dot{p}(\cdot)$$

بنابراین به مسئله زیر برای v می‌رسیم

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = F_1(x, t); \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (3a)$$

$$v(x, 0) = f_1(x); \quad 0 \leq x \leq l \quad (3b)$$

$$v_t(x, 0) = g_1(x); \quad 0 \leq x \leq l \quad (3c)$$

$$v(0, t) = 0; \quad t \geq 0 \quad (3d)$$

$$v(l, t) = 0; \quad t \geq 0 \quad (3e)$$

چنانچه در مسئله‌ای $F_1(x, t)$ برابر صفر گردد آنگاه جواب مسئله (۳) را می‌توان از روی (۶) به دست آورد و با توجه به (۱۰) به جواب مسئله (۱) رسید. حال اگر $F_1(x, t) \neq 0$ آنگاه به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (11)$$

برای مسئله (۳) می‌پردازیم. با جایگزین کردن آن در (۳a) می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n) \sin \frac{n\pi}{l} x = F_1(x, t); \quad \lambda_n = c \frac{n\pi}{l}$$

بنابراین $\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n$ را می‌توان برابر ضریب سینوسی فوریه تابع $F_1(x, t)$ گرفت یعنی

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2}{l} \int_0^{\lambda} F(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (12)$$

با حل این معادله به جوابی عمومی به صورت

$$G_n(t) = a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t + G_n^*(t) \quad (13)$$

که در آن $G_n^*(t)$ یک جواب خصوصی معادله (۱۲) است، می‌رسیم. با توجه به آن (۱۱) به صورت زیر در می‌آید.

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t + G_n^*(t)) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

با توجه به این تساوی و (۳b) و (۳c) به ترتیب می‌یابیم

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + G_n^*(0)) \sin \frac{n\pi}{l} x = f_1(x)$$

و

$$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \lambda_n + \dot{G}_n^*(0)) \sin \frac{n\pi}{l} x = g_1(x)$$

و از آنجا

$$a_n = -G_n^*(0) + \frac{2}{l} \int_0^l F_1(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (15)$$

و

$$b_n = \frac{1}{\lambda_n} [-\dot{G}_n^*(0) + \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx] \quad (16)$$

بنابراین مسئله (۱) دارای جوابی به صورت (۱۰) است که در آن v از فرمول (۱۴) با ضرایب (۱۵) و (۱۶) به دست می‌آید.

مثال ۲. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{xx} - u_x = t; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_t(x, 0) = 2; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = 2t; \quad t \geq 0$$

$$u(1, t) = t; \quad t \geq 0$$

چنین قرار می‌دهیم: $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ و w را طوری می‌یابیم که $v(0, t) = 0$ و

$v(1, t) = 0$ برای این منظور می‌نویسیم $w(x, t) = ax + b$ و با چنین فرضی می‌یابیم

$$a = \frac{t-2t}{1} = -t, \quad b = 2t$$

بنابراین $w = -tx + 2t$ و از آنجا

$$u(x, t) = v(x, t) - tx + 2t$$

با توجه به اینکه

$$v(x, 0) = u(x, 0) = x, \quad u_{xx} = v_{xx}, \quad u_t = v_t$$

و

$$v_t(x, 0) = u_t(x, 0) + x - 2 = x$$

مسئله مربوط به v به صورت زیر در می‌آید

$$v_{tt} - v_{xx} = t, \quad v(x, 0) = x, \quad v_t(x, 0) = x, \quad v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0$$

برای حل این مسئله به جستجوی جوابی به صورت زیر می‌پردازیم

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin n\pi x$$

با قرار دادن آن در معادله می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{G}_n + n^2 \pi^2 G_n) \sin n\pi x = t$$

و از آنجا

$$\ddot{G}_n + n^2 \pi^2 G_n = \int_0^1 t \sin n\pi x dx = -\frac{2t}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{2t}{n\pi} (1 + (-1)^{n+1})$$

و

$$G_n = a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t + \frac{2t}{n^2 \pi^2} (1 + (-1)^{n+1})$$

در نتیجه

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t + \frac{\gamma t}{n^r \pi^r} (1 + (-1)^{n+1})] \sin n\pi x$$

با توجه به اینکه $v(x,0) = x$ می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x = x$$

و از آنجا

$$a_n = \gamma \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \frac{\gamma}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

از روی $v_t(x,0) = x$ می‌یابیم.

$$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} [n\pi b_n + \frac{\gamma}{n^r \pi^r} (1 + (-1)^{n+1})] \sin n\pi x = x$$

بنابراین

$$n\pi b_n + \frac{\gamma}{n^r \pi^r} (1 + (-1)^{n+1}) = \gamma \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \frac{\gamma}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

و یا

$$b_n = \frac{\gamma}{n^r \pi^r} ((-1)^n - 1) + \frac{\gamma}{n^r \pi^r} (-1)^{n+1}$$

در نتیجه

$$u(x,t) = -tx + \gamma t + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma}{n\pi} (-1)^{n+1} \cos n\pi t + \left[\frac{\gamma}{n^r \pi^r} ((-1)^n - 1) + \frac{\gamma}{n^r \pi^r} (-1)^{n+1} \right] \sin n\pi t + \frac{\gamma t}{n^r \pi^r} (1 + (-1)^{n+1}) \right\} \sin n\pi x$$

مثال ۳. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt} - \gamma \omega u_{xx} = x + \frac{\gamma \omega}{\gamma} \pi; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \left(\frac{1}{\gamma} - \pi/\gamma \right) x^2; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_t(x, 0) = 1+x; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_x(0, t) = \frac{\pi}{4}; \quad t \geq 0$$

$$u_x(1, t) = 1; \quad t \geq 0$$

قرار می دهیم

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

حال $w(x, t)$ را طوری می یابیم که $v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0$ برای این منظور می توانیم چنین قرار دهیم $w = ax^2 + bx$ که از آنجا $w_x = 2ax + b$ با توجه به این مفروضات داریم

$$w_x(0, t) = \frac{\pi}{4} = b$$

$$\text{و } w_x(1, t) = 2a + b = 1$$

$$a = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

در نتیجه

$$u(x, t) = v(x, t) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 + \frac{\pi}{4}x$$

با جایگزین کردن این تابع در مسئله می یابیم

$$v_{tt} - 25v_{xx} = 25 + x;$$

$$v(x, 0) = -\frac{\pi}{4}x, \quad v_t(x, 0) = 1+x;$$

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(1, t) = 0$$

$$v_{tt} = 25v_{xx}; \quad v_x(0, t) = 0, \quad v_x(1, t) = 0$$

را به تفکیک متغیرها $v(x, t) = F(x)G(t)$ تا تعیین $F(x)$ حل می کنیم. با توجه به $v_{tt} = 25v_{xx}$ و

$$v = FG \text{ داریم}$$

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{25G} = k$$

با توجه به تساوی فوق و شرایط $v_x(0, t) = 0$ و $v_x(1, t) = 0$ به مسئله زیر برای F می رسمیم

$$F'' - KF = 0; \quad F'(0) = 0, \quad F'(1) = 0$$

به ازای $k=0$ داریم $F=ax+b$ و $F'=a$ و با توجه به هر یک از شرایط $F'(0)=0$ یا $F'(1)=0$ نتیجه می گیریم $a=0$ در نتیجه $F=b$ یک جواب مسئله است.

به ازای $k=-p^2 < 0$ داریم

$$F'' + p^2 F = 0 \quad ; \quad F'(0) = 0 \quad , \quad F'(1) = 0$$

که دارای جواب عمومی زیر است

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

و از روی آن داریم

$$F'(x) = -A p \sin px + B p \cos px$$

با توجه به شرط $F'(0) = 0$ نتیجه می شود $Bp = 0$ و یا $B = 0$ بنابراین

$$F'(x) = -A p \sin px$$

نظر به اینکه $F'(1) = 0$ داریم $F'(1) = -A p \sin p = 0$ که با انتخاب $p = n\pi$ می توان A را مخالف صفر انتخاب نمود و نتیجه گرفت که مسئله مربوط به تابع F دارای جواب $F_n(x) = A \cos n\pi x$ است. حال به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \cos n\pi x$$

می پردازیم. با درج آن در معادله مسئله می یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ddot{G}_n + 2\Omega n^2 \pi^2 G_n) \cos n\pi x = 2\Omega + x$$

و از آنجا

$$\ddot{G}_n + 2\Omega n^2 \pi^2 G_n = 2 \int_0^1 (2\Omega + x) \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1); n \neq 0$$

که دارای جواب عمومی

$$G_n(t) = a_n \cos \Omega n\pi t + b_n \sin \Omega n\pi t + \frac{2}{2\Omega n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1); n \neq 0$$

است. به ازای $n=0$ داریم

$$G_0 = \int_0^1 (25+x) dx = \frac{51}{2}$$

که دارای جواب عمومی

$$G_0 = \frac{51}{4} t^2 + a_0 t + b_0$$

است، بنابراین

$$v(x,t) = \frac{51}{4} t^2 + a_0 t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \Delta n \pi t + b_n \sin \Delta n \pi t + \frac{2}{2 \Delta n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1)] \cos n \pi x$$

$$v(x,0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n + \frac{2}{2 \Delta n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1)] \cos n \pi x = -\frac{\pi}{2} x$$

$$b_0 = \int_0^1 (-\frac{\pi}{2} x) dx = -\frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{2 \Delta n^2 \pi^2} ((-1)^{n+1} + 1) - \pi \int_0^1 x \cos n \pi x dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^{n+1} + 1) (\frac{1}{2 \Delta n^2 \pi^2} + \frac{\pi}{2})$$

$$v_t(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta n \pi b_n \cos n \pi x = 1 + x$$

$$a_0 = \int_0^1 (1+x) dx = \frac{3}{2}$$

$$\Delta n \pi b_n = 2 \int_0^1 (1+x) \cos n \pi x dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1)$$

$$b_n = \frac{2}{\Delta n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1)$$

بنابراین

$$u(x,t) = (\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4})x^2 + \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta l}{4} t^2 + 3t - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 \pi^2} ((-1)^{n+1} + 1) \left(\frac{1}{2 \Delta n^2 \pi^2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \Delta n \pi t \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Delta n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) \sin \Delta n \pi t + \frac{1}{2 \Delta n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) \right\} \cos n \pi x$$

۴.۲. حل دالامبر معادله موج

مسئله

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad ; \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0 \quad (4a)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad u_t(x, 0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq l \quad (4b)$$

$$u(0, t) = 0 \quad ; \quad u(l, t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad (4c)$$

را می‌توان به روش غیر ضربی نیز حل نمود در اینجا روشی را برای حل این مسئله ارائه می‌کنیم که به روش دالامبر موسوم است. برای حل مسئله به این روش تغییر متغیر

$$z = x - ct \quad \quad \quad \text{و} \quad \quad \quad v = x + ct$$

می‌دهیم و با توجه به این تغییر متغیر می‌یابیم

$$u_t = u_v v_t + u_z z_t = c(u_v - u_z)$$

و از آنجا

$$u_{tt} = c^2 [(u_v - u_z)_v v_t + (u_v - u_z)_z z_t] = c^2 [u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}]$$

و همینطور

$$u_{xx} = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}$$

با جایگزین کردن آنها در معادله مسئله می‌یابیم $u_{vz} = 0$ و با انتگرالگیری از آن نتیجه می‌شود $u_v = h(v)$ و با انتگرالگیری مجدد داریم

$$u = \int h(v) dv + \psi(z) = \phi(v) + \psi(z)$$

بنابراین جواب معادله (۴a) عبارت است از

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \tag{۱}$$

با توجه به شرط $u(x,0) = f(x)$ نتیجه می شود

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x) \tag{۲}$$

همینطور بنا به شرط $u_t(x,0) = 0$ می یابیم

$$c(\phi'(x) - \psi'(x)) = 0$$

و از آنجا

$$\phi'(x) - \psi'(x) = 0 \tag{۳}$$

با انتگرالگیری از (۳) نتیجه می شود

$$\phi(x) - \psi(x) = k \tag{۴}$$

که در آن k عددی ثابت است. با جمع (۲) و (۴) می یابیم

$$\phi(x) = \frac{1}{2} [f(x) + k]$$

با کم کردن (۴) از (۲) نتیجه می گیریم

$$\psi(x) = \frac{1}{2} [f(x) - k]$$

با جایگزین کردن آنها در (۱) نتیجه می شود

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + k] + \frac{1}{2} [f(x-ct) - k]$$

و یا

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] \tag{۵}$$

و با توجه به شرط $u(0,t) = 0$ نتیجه می شود

$$f(-ct) = -f(ct)$$

و از روی $u(l,t) = 0$ به ازای هر عدد حقیقی α می توان استنتاج کرد که

$$f(\alpha + 2l) = f(\alpha)$$

یعنی تابع f که در (۵) ظاهر شده است تابعی فرد با دوره $2l$ است و چون $f(x)$ به ازای $0 \leq x \leq l$ تعریف شده است بنابراین چنین تابعی می بایست برابر گسترش فرد $f(x)$ باشد

یعنی در واقع جواب مسئله (۴) عبارت است از

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] \quad (۶)$$

جواب مسئله (۴) را به کمک سری فوریه نیز می‌توان به دست آورد و نتیجه گرفت

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{l} x; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (۷)$$

گرچه به ظاهر دو جواب (۶) و (۷) هیچ شباهتی باهم ندارند ولی به سادگی می‌توان یکی بودن این دو جواب را اثبات نمود. در واقع با جایگزین کردن

$$\cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{l} x = \cos \frac{cn\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x = \frac{1}{2} \left\{ \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x-ct) \right\} + \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x+ct) \right\} \right\}$$

در (۷) می‌یابیم

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x-ct) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left\{ \frac{n\pi}{l} (x+ct) \right\}$$

با جایگزین کردن $x-ct$ و $x+ct$ بجای x در سری فوریه $f(x)$ گسترش فرد $f(x)$ ، یعنی در

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

و محاسبه میانگین آنها می‌یابیم

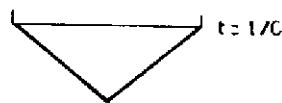
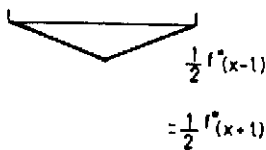
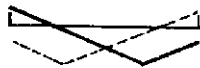
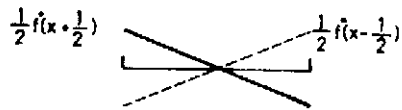
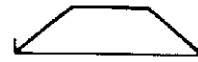
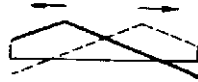
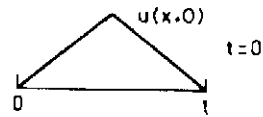
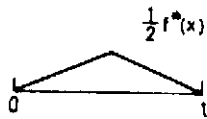
$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)]$$

که همان جواب (۶) است. به کمک جواب (۶) و داشتن انحراف اولیه یک مسئله موج می‌توان وضعیت جواب را در هر لحظه و در هر نقطه دقیقاً مشخص نمود و منحنی جواب را در هر لحظه رسم نمود. مثلاً چنانچه انحراف اولیه مسئله همان انحراف مثال ۱ این بخش باشد آنگاه با توجه به آن می‌توان در هر لحظه وضعیت نخ را رسم نمود مثلاً در ذیل وضعیت نخ در لحظه $t = \frac{l}{4}$ رسم شده است. در این مسئله $c=1$ اختیار شده است.

$$u(x, l/4) = \frac{1}{2} \left[f^* \left(x + \frac{l}{4} \right) + f^* \left(x - \frac{l}{4} \right) \right]$$

یعنی نخ از سقف شروع به سقوط کرده و بعد از $\frac{l}{4}$ ثانیه به وضعیت شکل ۱ ب و بعد از $\frac{l}{4}$ ثانیه در وضعیت صفر یعنی به صورت شکل ۱ د و بعد از l ثانیه به نقطه حضیض خود یعنی به

صورت ۱ ج در می آید. در هر صورت در لحظات l و $3l$ و ... در نقطه حسیض خود و در لحظات صفر و $2l$ و $4l$ و ... در نقطه اوج و در لحظه $l/2$ و $3l/2$ و ... بر محور x واقع است.



۵.۲. تمرینات

۱- مسئله ارتعاش را در حالتی حل کنید که انحراف در روی مرز ناحیه صفر و سرعت اولیه و انحراف اولیه آن به صورت داده شده باشند.

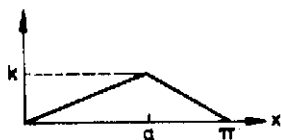
a. $u(x, 0) = x(1-x), u_t(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$

جواب.
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{n^2 \pi^2 \gamma} [1 + (-1)^{n+1}] \cos n \pi c t \sin n \pi x$$

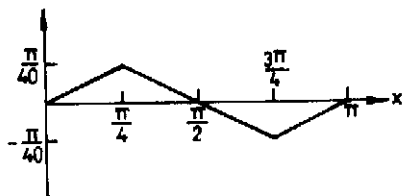
b. $u(x, 0) = \gamma \sin x, u_t(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi$

جواب.
$$u(x, t) = \gamma \cos c t \sin x$$

۲- مسئله ارتعاش نخ را در حالتی حل کنید که انحراف اولیه ارتعاش برابر یکی از توابع زیر و سرعت اولیه آن صفر باشد. وضعیت ارتعاش را در چند لحظه که خود انتخاب خواهید نمود به کمک جواب حاصل از روش دالامبر رسم کنید ($c=1$).



جواب.
$$u = \frac{\gamma k}{a(\pi - a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2} \cos nt \sin nx$$



$$u = \frac{4}{\Delta\pi} \left(\frac{1}{4} \cos 2t \sin 2x - \frac{1}{36} \cos 6t \sin 6x + \frac{1}{100} \cos 10t \sin 10x + \dots \right) \text{ جواب.}$$

۳. جواب هر یک از معادلات زیر را به روش ضربی به دست آورید.

a. $u_x + u_y = 0$ جواب. $u = ke^{c(x-y)}$

b. $yu_x = xu_y$ جواب. $u = e^{k(x^2+y^2)}$

c. $xu_x = yu_y$ جواب. $u = cx^k y^k$

d. $u_{xy} = u$ جواب. $u = ke^{c(x+y)}$

e. $u_{xx} + u_x - 2u = 0$

$u = f(y)e^x + g(y)e^{-2x}$ جواب.

۴. هر یک از معادلات زیر را با تغییر متغیرهای داده شده حل کنید.

a. $u_{xx} + u_{xy} = 2u_{yy}$; $v = x+y$, $z = 2x-y$

b. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$; $v = y$, $z = x+y$

c. $yu_{xy} - xu_{xx} + u_x = 0$; $v = y$, $z = xy$

۵. هر یک از مسائل زیر را حل کنید

a. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; $0 < x < \pi$, $t > 0$

$u(x, 0) = 0$; $u_t(x, 0) = 0$; $0 \leq x \leq \pi$

$u(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(0, t) = 0$; $u_{xx}(\pi, t) = \sin t$; $t \geq 0$

$$u(x, t) = \frac{c}{\gamma} \left[\frac{\sinh \sqrt{\frac{1}{c}} x}{\sinh \sqrt{\frac{1}{c}} \pi} - \frac{\sin \sqrt{\frac{1}{c}} x}{\sin \sqrt{\frac{1}{c}} \pi} \right] \sin t$$

$+ \frac{\gamma}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{n^2 - (1/c^2)} \sin n^2 ct \sin nx$ جواب.

$\sqrt{\frac{1}{c}}$ عددی صحیح نیست.

b. $u_{tt} - 9u_{xx} = x$, $0 < x < \pi$; $t > 0$.

$u(x, 0) = 2$, $u_t(x, 0) = 1 + x$; $0 \leq x \leq \pi$

$u_x(0, t) = t$, $u_x(\pi, t) = 2t$; $t \geq 0$.

$u(x, t) = \frac{\pi^2 + 9}{9\pi} t^2 + a_0 t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos 3nt + b_n \sin 3nt \}$. جواب.

$+ \frac{2}{9\pi n^2} [(-1)^n - 1] \cos nx + \frac{t}{2\pi} x^2 + cx$

$a_0 = 1 - \pi/9$, $b_0 = 2$, $a_n = \frac{2}{9\pi n^2} [(-1)^{n+1} + 1]$, $b_n = \frac{2}{9\pi n^2} (-1)^n$

c. $u_{tt} - 2\Delta u_{xx} = 0$, $0 < x < 1$; $t > 0$.

$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $u_t(x, 0) = 1 + x$; $0 \leq x \leq 1$

$u_x(0, t) = \pi/2$, $u_x(1, t) = 0$; $t \geq 0$.

$u(x, t) = (0 - \frac{2\Delta}{2} \pi) \frac{t^2}{2} + \frac{2}{2} t + \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 \pi (1 - 4n^2)} \cos \Delta n \pi t \right.$

$\left. + \frac{2}{\Delta n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \sin \Delta n \pi t \right\} \cos n \pi x + \frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4} x^2$

۶- هر یک از مسائل زیر را به روش دالامبر و با تغییر متغیر $v = x + 2t$ و $z = x - 2t$ حل کنید.

a. $u_{tt} = 2u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$.

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = x + 1$, $0 \leq x \leq \pi$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \quad t \geq 0.$$

$$b. \quad u_{tt} - 4u_{xx} = x + t^2 \quad 0 < x < \pi$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = -x \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = t^2, \quad u(\pi, t) = t; \quad t \geq 0.$$

۶.۲. مسئله گرما

در این بخش به حل مسئله زیر می‌پردازیم

$$u_t - c^2 u_{xx} = F(x, t); \quad 0 < x < l; \quad t > 0. \quad (5a)$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq l \quad (5b)$$

$$u(0, t) = p(t); \quad t \geq 0. \quad (5c)$$

$$u(l, t) = q(t); \quad t \geq 0. \quad (5d)$$

می‌توان نشان داد که مسئله (۵) دارای جواب بوده و جواب آن منحصر به فرد است و ما بنا داریم که جواب این مسئله را به روش جداسازی متغیرها بیابیم ولی قبل از حل این مسئله نخست نشان می‌دهیم که میزان درجه حرارت در میله‌ای به طول l که در اثر انتقال حرارت در میله صورت می‌پذیرد در مسئله (۵) صدق می‌کند برای این منظور فرض می‌کنیم میله همگن بوده و در همه جا هم ضخامت باشد و انتقال حرارت تنها در طول میله صورت پذیرد و از سطح جانبی آن انتقال حرارتی صورت نگیرد به عبارت دیگر میله در سراسر طول خود غیر از دو انتها کاملاً عایق پوش شده باشد. چنانچه میله را در طول محور x بین صفر تا نقطه‌ای به طول l بگیریم آنگاه درجه حرارت میله تابعی از زمان و طول نقطه یعنی به صورت $u(x, t)$ خواهد بود. چنانچه درجه حرارت اولیه میله و درجه حرارت دو سر میله در هر لحظه در دست بوده و به ترتیب برابر $f(x)$, $p(t)$ و $q(t)$ باشد، آنگاه u در شرایط (۵b) تا (۵d) صدق خواهد کرد. برای آنکه نشان دهیم u در شرط (۵a) یعنی در معادله نیز صدق

می‌کند، لازم است که از برخی خواص اجسام که به طور تجربی به دست می‌آیند استفاده کنیم.



تجربه نشان می‌دهد که شار گرمایی یا مقدار گرمایی که در واحد زمان از نقطه‌ای به طول x با مساحت سطح مقطع s از میله عبور می‌کند با حاصلضرب مساحت سطح مقطع در مشتق u نسبت به x در این نقطه متناسب است یعنی چنانکه q شار گرمایی باشد داریم:

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} s$$

حال چنانچه دو نقطه با طولهای x و $x + \Delta x$ از میله را اختیار کنیم و حرارت عبور کرده در طول زمان Δt از این دو نقطه را به ترتیب ΔQ_1 و ΔQ_2 بنامیم در آن صورت $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ حرارت تلف شده در میله به طول Δx در طول زمان Δt بوده و برابر است با

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = -k \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} s \Delta t + k \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} s \Delta t = k \left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) s \Delta t$$

از طرفی تجربه فیزیکی نشان می‌دهد که مقدار حرارت تلف شده در یک جسم با جرم m در تغییر درجه حرارت نسبت به زمان متناسب است یعنی

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \sigma m \Delta u = \sigma \rho s \Delta u \Delta x$$

با توجه به تساویهای فوق می‌یابیم:

$$k \left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \Delta t = \sigma \rho \Delta u \Delta x$$

و یا

$$\frac{k}{\sigma\rho} \cdot \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

با فرض آنکه $\Delta x \rightarrow 0$ ، $\Delta t \rightarrow 0$ می‌یابیم

$$\frac{k}{\sigma\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

k و σ به ترتیب به ضریب هدایت گرما و گرمای ویژه موسوم‌اند. با قرار دادن $c^2 = \frac{k}{\sigma\rho}$

می‌یابیم

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

که همان معادله $(5a)$ به ازای $F(x, t) = 0$ است بنابراین درجه حرارت در یک میله را می‌توان

از حل مسئله (5) به دست آورد. برای حل مسئله (5) به جستجوی جوابی به صورت

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

می‌پردازیم w را طوری اختیار می‌کنیم که $v(0, t) = 0$ و $v(l, t) = 0$ همانند آنچه که در حل

مسئله موج دیدیم کافی است فرض کنیم

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{q(t) - p(t)}{l} x + p(t)$$

با قرار دادن در شرایط (5) به مسئله زیر برای v می‌رسیم

$$v_t - c^2 v_x = F_1(x, t) \quad ; \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (6a)$$

$$v(x, 0) = f_1(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0 \quad (6b)$$

$$u(0, t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0 \quad (6c)$$

$$v(l, t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0 \quad (6d)$$

که در آن

$$F_1(x, t) = F(x, t) - \frac{q(t) - p(t)}{l} x - p(t),$$

$$f_1(x) = f(x) - \frac{q(0) - p(0)}{l} x - p(0),$$

فصل دوم (۹۷)

برای حل مسئله (۶) و تعیین v با توجه به اینکه شرایط کرانه‌ای مسئله همانند مسئله متناظر با آن در مسئله موج است کافی است به جستجوی جوابی به صورت زیر پردازیم

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

مثال ۴. مطلوبست حل مسئله زیر

$$u_{t^2} - 9u_{xx} = x \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 1 - \cos \pi x \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0$$

$$u(1, t) = 2 \quad ; \quad t \geq 0$$

حل : می‌نویسیم

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

و w را طوری می‌یابیم که $v(0,t) = 0$ و $v(1,t) = 0$ برای این منظور کافی است فرض کنیم

$$u(x,t) = v(x,t) + 2x \quad \text{و از آنجا} \quad w(x,t) = 2x$$

با توجه به این تساوی مسئله زیر برای v به دست می‌آید

$$v_{t^2} - 9v_{xx} = x$$

$$v(x, 0) = 1 - \cos \pi x - 2x, \quad v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0$$

با جایگزین کردن

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin n\pi x$$

در معادله مسئله اخیر می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n) \sin n\pi x = x$$

G را طوری انتخاب می‌کنیم که $\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n$ برابر ضریب فوریه تعمیم فرد تابع x باشد یعنی

$$\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx$$

و از آنجا

$$\dot{G}_n + 9n^2\pi^2 G_n = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad n \neq 0$$

این معادله دارای جواب عمومی زیر است

$$G_n = a_n e^{-3n\pi^2 t} + \frac{2}{9n^2\pi^2} (-1)^{n+1}$$

بنابراین

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n e^{-3n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^2\pi^2} (-1)^{n+1} \right\} \sin n\pi x$$

با توجه به شرط $v(x,0) = 1 - \cos \pi x - 2x$ می‌یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{2}{9n^2\pi^2} (-1)^{n+1} \right) \sin n\pi x = 1 - \cos \pi x - 2x$$

و از آنجا

$$a_n = \frac{2}{9n^2\pi^2} (-1)^n + \frac{2}{\pi} \left[\frac{2(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n((-1)^{n+1} - 1)}{n^2 - 1} \right]; \quad n \neq 1$$

$$a_1 = \frac{-2}{9\pi^2} + 2 \int_0^1 (1 - \cos \pi x - 2x) \sin \pi x dx = \frac{-2}{9\pi^2}$$

بنابراین

$$u(x,t) = 2x - \frac{2}{9\pi^2} e^{-3\pi^2 t} + \frac{2}{9\pi^2} \sin \pi x +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{9n^2\pi^2} (-1)^n + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n((-1)^{n+1}-1)}{n^2-1} \right] \right\} e^{-9n^2\pi^2 t} +$$

$$\frac{1}{9n^2\pi^2} (-1)^{n+1} \sin n\pi x$$

۷.۲. تمرینات

۱- درجه حرارت در یک میله به طول ده سانتیمتر را بیاید در صورتی که درجه حرارت دو سر میله صفر بوده و درجه حرارت اولیه میله برابر یکی از توابع زیر باشد ($c^2 = 1.752$).

a. $u(x, 0) = \sin 0.1\pi x$

$$u = \sin 0.1\pi x e^{-1.752\pi^2 t / 100}$$

جواب.

b. $f(x) = \begin{cases} x; & 0 < x < 5 \\ 10-x; & 5 < x < 10 \end{cases}$



$$u = \frac{1}{\pi^2} (\sin 0.1\pi x e^{-0.1752\pi^2 t} - 1/9 \sin 0.3\pi x e^{-0.1752(3\pi)^2 t})$$

جواب.

c. $f(x) = \begin{cases} x; & 0 < x < 25 \\ 50-x; & 25 < x < 50 \end{cases}$

۲- هر یک از مسائل زیر را حل کنید.

a. $u_t - u_{xx} = xt$; $0 < x < 1$, $t > 0$

$$u(x, 0) = \sin \pi x ; 0 \leq x \leq 1 ,$$

$$u(0, t) = t ; u(1, t) = t^2 , t \geq 0$$

b. $u_t - u_{xx} = 2x^2 t$; $0 < x < 1$, $t > 0$

$$u(x, 0) = \cos \frac{3\pi x}{4} ; 0 \leq x \leq 1 ,$$

$$u(0, t) = 1 , u_x(1, t) = \frac{3\pi}{4} ; t \geq 0$$

۸.۲ مسئله انتقال حرارت برای یک میله با طول نامتناهی

چنانچه در بخش قبل دیدیم مثالی فیزیکی برای مسئله (۵) اندازه گیری درجه حرارت در یک میله است. بنابر این درجه حرارت در یک میله در لحظه t و در نقطه ای به طول x از معادله (۵a) به دست می آید و چنانچه در بخش قبل دیدیم برای حل این معادله نیاز به سه شرط اولیه و کرانه ای داریم و نظر به اینکه میله با طولی نامتناهی است و در این بحث ما آن را از دو طرف نامتناهی می گیریم. بنابراین از شرایط (۵c) و (۵d) نمی توان استفاده کرد و مسئله (۵) به مسئله زیر تبدیل می شود.

$$u_t - c^2 u_{xx} \quad ; \quad -\infty < x < \infty \quad (va)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad -\infty < x < \infty \quad (vb)$$

که در آن $u(x, 0) = f(x)$ درجه حرارت اولیه در میله است. بدیهی است که با حل مسئله (v) نمی توان به جوابی یکتا رسید ولی با توجه به اینکه مسئله انتقال حرارت در میله مطرح است چنانچه خواهیم دید در حل این مسئله می توان از خواص انتقال حرارت در اجسام استفاده کرد و برای مسئله (v) به جوابی یکتا رسید برای این منظور به حل مسئله به روش ضربی $u(x, t) = F(x) G(t)$ می پردازیم. با جایگزین کردن آن در (va) می یابیم

$$\frac{F''}{F} = \frac{G}{c^2 G} = k$$

و یا

$$G - kc^2 G = 0, \quad F'' - kF = 0.$$

حال چنانچه $k = 0$ آنگاه می یابیم $G(t) = 1$ و از آنجا $u(x, t) = F(x)$ که مستقل از t است. درجه حرارت در یک میله با یک حرارت اولیه نمی تواند مستقل از زمان باشد، بنابراین به ازای $k = 0$ جوابی حاصل نمی شود حال فرض می کنیم $k = \mu^2 > 0$ آنگاه می یابیم

$$u = F(x)e^{c^2 \mu^2 t} \quad \text{و بنابراین} \quad G(t) = e^{c^2 \mu^2 t}$$

که نشانگر آن است که با افزایش زمان درجه حرارت بسیار بزرگ می شود که با توجه به

خواص انتقال حرارت در اجسام غیر ممکن است. بالاخره فرض می‌کنیم $k = -w^2 < 0$ و با این فرض می‌یابیم

$$\dot{G} + c^2 w^2 G = 0, \quad F'' + w^2 F = 0.$$

که به ترتیب دارای جوابهایی به صورت زیر هستند

$$G(t) = e^{-c^2 w^2 t} \quad \text{و} \quad F(x) = a(w) \cos wx + b(w) \sin wx$$

بنابراین

$$u(x, t, w) = [a(w) \cos wx + b(w) \sin wx] e^{-c^2 w^2 t}$$

جوابی برای معادله (۷a) است که به سه پارامتر $a(w)$ و $b(w)$ و وابسته است. برای تعیین این مقادیر چنین قرار می‌دهیم

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} u(x, t, w) dw$$

$u(x, t)$ نیز جوابی برای معادله (۷a) است. درستی این ادعا را می‌توان با جایگزین کردن $u(x, t)$ در معادله (۷a) ثابت کرد. با توجه به شرط $u(x, 0) = f(x)$ می‌یابیم

$$u(x, 0) = \int_0^{\infty} [a(w) \cos wx + b(w) \sin wx] dw = f(x)$$

بنابراین ضرایب $a(w)$ و $b(w)$ را می‌توان ضرایب انتگرال فوریه تابع $f(x)$ گرفت. در نتیجه مسئله (۷) دارای جوابی به صورت زیر است

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} (a(w) \cos wx + b(w) \sin wx) e^{-c^2 w^2 t} dw$$

که در آن

$$\begin{pmatrix} a(w) \\ b(w) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{pmatrix} \cos wx \\ \sin wx \end{pmatrix} dx$$

مثال ۵. درجه حرارت در یک میله نامتناهی را بیابید در صورتی که

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & ; \quad |x| \leq 1 \\ 0 & ; \quad |x| > 1 \end{cases}$$

حل. داریم $a(w) = 0$ و

$$b(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 x \sin wx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{w} \cos wx + \frac{1}{w^2} \sin wx \right]_0^1 = \frac{1}{\pi w} \left(\frac{\sin w}{w} - \cos w \right)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{w} \left(\frac{\sin w}{w} + \cos w \right) \sin wx e^{-c^2 w^2 t} dw$$

برای پیدا کردن مقدار درجه حرارت در یک میله با طول متناهی که درجه حرارت دو سر آن در دست نباشد می توان از جواب حاصل برای مسئله (۷) استفاده کرد. برای این منظور درجه حرارت برای میله فرضی از l تا بینهایت و از $-\infty$ تا صفر را برابر صفر می گیریم. جوابی که با این فرض به دست می آید جوابی دقیق برای میله با طول نامتناهی و جوابی تقریبی برای میله به طول l است.

مسئله انتقال حرارت در یک میله نیمه متناهی که در فاصله صفر تا بینهایت قرار دارد و دارای درجه حرارت اولیه $u(x, 0) = f(x)$; $0 \leq x < \infty$ را می توان با در نظر گرفتن گسترش فردی از $f(x)$ حل نمود.

مسائل یک بعدی را در اینجا رها می کنیم و به سراغ مسائلی با بعدهای بالاتر می رویم چنانچه خواهیم دید جواب چنین مسائلی به سادگی از تعمیم راه حلهائی که برای مسائل یک بعدی ارائه شد به دست می آیند بررسی چنین مسائلی را بعد از ارائه چند تمرین در مورد مسئله انتقال حرارت در یک میله نامتناهی با حل مسئله موج در فضای دوبعدی آغاز می کنیم.

۹.۲. تمرینات

۱- مسئله گرما در یک میله نامتناهی را حل کنید در صورتی که گرمای اولیه در میله برابر یکی از توابع زیر باشد

$$a. f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 2 \\ 0 & ; x > 2 \end{cases}, f(-x) = f(x)$$

$$b. f(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 < x < 1 \\ 2x^2 & ; 1 < x < 2 \\ 0 & ; x > 2 \end{cases} f(-x) = -f(x)$$

۲- هر یک از مسائل زیر را حل کنید

$$a. u_t - u_{xx} = \begin{cases} 2t & ; 0 < x < \pi \\ 1 & ; x > \pi \end{cases}$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x & ; 0 < x < 1 \\ -1 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$u(0, t) = t - 1 \quad ; t \geq 0$$

$$b. u_t - 4u_{xx} = \begin{cases} 2t & ; |x| < \pi \\ 0 & ; |x| > \pi \end{cases}$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} |x| & ; |x| < 1 \\ 0 & ; |x| > 1 \end{cases}$$

۱۰.۲. حل مسئله موج در فضای دوبعدی

در این بخش به چگونگی حل مسئله با مقادیر اولیه و کرانه‌ای زیر می‌پردازیم

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) \quad ; \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0. \quad (\lambda a)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad ; \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad (\lambda b)$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) \quad ; \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad (\lambda c)$$

$$u(x, 0, t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0. \quad (\lambda d)$$

$$u(x, b, t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0. \quad (\lambda e)$$

$$u(0, y, t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0. \quad (\lambda f)$$

$$u(a, y, t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0. \quad (\lambda g)$$

این مسئله به مسئله موج در فضای دو بعدی موسوم است. مثال فیزیکی برای این مسئله ارتعاش یک غشاء مستطیلی با ضلعهای a و b است. برای حل این مسئله به روش ضربی عمل می‌کنیم. نخست به جستجوی جوابی برای مسئله به صورت

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t)$$

می‌پردازیم. با درج تابع فوق در (λa) می‌یابیم

$$FG = c^2 (F_{xx} + F_{yy})G$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر $c^2 FG$ داریم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{F} (F_{xx} + F_{yy}) = k_1,$$

که در آن k_1 عددی ثابت است و از آنجا به معادلات زیر می‌رسیم

$$F_{xx} + F_{yy} - k_1 F = 0, \quad \ddot{G} - k_1 c^2 G = 0.$$

برای حل معادله اول که خود نیز یک معادله با مشتق جزئی است به جستجوی جوابی به

صورت $F(x, y) = H(x)Q(y)$ می‌پردازیم. با جایگزینی آن در معادله می‌یابیم

$$QH'' + HQ'' - k_1 HQ = 0.$$

$$\frac{H''}{H} = \frac{1}{Q} (k_1 Q - Q'') = k_1$$

و از آنجا به معادلات دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$H'' - k_1 H = 0$$

$$Q'' - (k_1 - k_1) Q = 0$$

از روی شرایط (λd) تا (λg) و $u(x, y, t) = H(x)Q(y)G(t)$ به شرایط زیر برای H و Q

می‌رسیم

$$Q(b) = 0, \quad Q(0) = 0 \quad \text{و} \quad H(a) = 0, \quad H(0) = 0$$

همانند آنچه در بخش اول دیدیم مسئله

$$H'' - k_1 H = 0 \quad H(0) = 0 \quad H(a) = 0$$

وقتی دارای جواب است که $k_1 = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2}; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ و جواب این مسئله عبارت است

از $H_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x$ و همینطور مسئله

$$Q'' - (k_1 - k_1) Q = 0, \quad Q(0) = 0, \quad Q(b) = 0$$

به ازای $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ دارای جواب $Q_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b} y$ است. برای

مشخص کردن G به حل معادله $G'' - k_1 c^2 G = 0$ می‌پردازیم. نخست توجه می‌کنیم که

$$-k_1 = -k_1 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

با فرض

$$\lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$$

داریم $G'' + \lambda_{mn}^2 G = 0$ که دارای جواب عمومی

است از اینرو

$$u_{mn}(x, y, t) = (a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

هم اکنون جوابی برای مسئله (۸) به صورت زیر در نظر می گیریم

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

a_{mn} و b_{mn} را طوری می یابیم که u در شرایط (۸b) و (۸c) صدق کند. با توجه به (۸b) داریم

$$u(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = f(x,y)$$

بنابراین a_{mn} را می توان ضریب سینوسی تابع f گرفت، یعنی

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy dx$$

از روی (۸c) می یابیم

$$u_t(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{mn} \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = g(x,y)$$

و از آنجا

$$b_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^a \int_0^b g(x,y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy dx$$

مثال ۶. مسئله موج را به ازای $a=b=\pi$, $c=1$ سرعت اولیه صفر و ارتعاش اولیه

$f(x,y) = xy \sin x \sin y$ حل کنید. به علت عدم وجود سرعت اولیه می یابیم $b_{mn} = 0$ و

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f \sin m x \sin n y \, dx \, dy = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} x \sin x \sin m x \, dx \int_0^{\pi} y \sin y \sin n y \, dy$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x \sin m x \, dx = \begin{cases} \frac{2m((-1)^{m+1}-1)}{(m^2-1)^2} ; m \neq 1 \\ \frac{\pi^2}{4} ; m = 1 \end{cases}$$

می‌یابیم

$$a_{mn} = \begin{cases} \frac{16}{\pi^2} \frac{mn((-1)^{m+1}-1)((-1)^{n+1}-1)}{(m^2-1)^2(n^2-1)^2}; & m \neq 1; n \neq 1 \\ \frac{\pi m((-1)^{m+1}-1)}{(m^2-1)^2}; & m \neq 1; n = 1; \lambda_{mn} = \sqrt{(m^2+n^2)} \\ \frac{\pi n((-1)^{n+1}-1)}{(n^2-1)^2}; & m = 1; n \neq 1 \\ \frac{\pi^2}{4}; & m = 1, n = 1 \end{cases}$$

با جایگزین کردن a_{mn} و b_{mn} در $u(x,y,t)$ جواب مسئله حاصل می‌شود. چنانچه در این بخش مشاهده کردیم جواب مسئله موج دو بعدی را به سادگی می‌توان از راه حل ارائه شده برای مسئله موج یک بعدی به دست آورد. همانند آن می‌توان به حل مسئله گرما دو بعدی و مسائل گرما و موج سه بعدی پرداخت، بنابراین بحث آینده را به معادلات لاپلاس و پواسن اختصاص می‌دهیم. چنانچه خواهیم دید در بسیاری موارد مسائل مربوط به آنها را نیز می‌توان با توجه به روشهایی که آموخته‌ایم به سادگی حل نمود.

۱۱.۲. تمرینات

۱- ارتعاش یک صفحه مربع شکل $a=b=1$ و $c=1$ را طوری بیابید که سرعت اولیه ارتعاش صفر بوده و لبه‌های ناحیه مربع شکل بدون ارتعاش باشد و انحراف اولیه برابری از توابع زیر باشد

a) $f(x,y) = \sin \pi x \sin \pi y$; $u = \cos \pi \sqrt{\Delta} \sin \pi x \sin \pi y$ جواب.

b) $f(x,y) = 0.1xy(1-x)(1-y)$

جواب $u = \frac{0.64}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2} \cos(\pi t \sqrt{(m^2+n^2)}) \sin m\pi x \sin n\pi y$

که در آن m و n اعداد طبیعی فرد هستند.

۱۲.۲. حل معادلات لاپلاس و پواسن

نیروهای جاذبه و دافعه بین بارهای الکتریکی و اجسام که به ترتیب از قوانین کولن و نیوتن پیروی می کنند دارای تابع پتانسیل می باشند و آن تابع پتانسیل خود نیز جواب معادله لاپلاس است. یادآوری می کنیم که به ازای هر تابع برداری F چنانچه تابع عددی f می موجود باشد که $\nabla f = F$ آنگاه گوئیم تابع عددی f تابع پتانسیل تابع برداری F است.

مثلاً چنانچه $F = kee' \frac{r}{r^3}$ نیروی جاذبه بین دو بار الکتریکی e و e' باشد که به فاصله r از یکدیگر قرار دارند آنگاه فی البداهه می توان نتیجه گرفت $(\frac{1}{r}) \nabla = -kee'$ که نشان می دهد F دارای تابع پتانسیل است و تابع پتانسیل $\frac{1}{r}$ جواب معادله لاپلاس است. توابع پتانسیل منتج از نیروهای الکتریکی را پتانسیل الکترو استاتیکی نیز می نامند چنین تابعی در نقاطی که بار وجود ندارد جواب معادله لاپلاس است. بنابراین با حل معادله لاپلاس در یک میدان به پتانسیل موجود در آن میدان می رسیم و با گرادیان گیری از آن مقدار نیروی موجود در آن میدان را می یابیم. معادله لاپلاس علاوه بر کاربرد در مسائل میدانهای نیروهای جاذبه و دافعه دارای کاربردهای متنوع دیگری از جمله در حل مسائل انتقال حرارت در حالت پایا که تغییرات درجه حرارت به زمان وابسته نیست و همچنین جریان سیالات در مسائل هیدرودینامیکی است. برای روشن شدن مطلب به ذکر چند مثال می پردازیم.

مثال ۷. پتانسیل میدان بین دو صفحه هادی موازی که عمود بر محور x در نقاطی با طولهای ۵ و ۵ هستند بیابید در صورتی که اختلاف پتانسیل های موجود روی این صفحات به ترتیب ۱۱۰ و ۲۲۰ ولت باشند.

حل. به علت وجود صفحات همپتانسیل معادله لاپلاس به صورت $u_{xx} = 0$ در می آید که

دارای جواب $u(x) = ax + b$ است. با توجه به شرایط $u(5) = 220$, $u(-5) = 110$ می یابیم $a = 11$ و $b = 165$ و بنابراین $u(x) = 11x + 165$ نیروی الکتریکی میدان برابر $F = 11i$ است که بر صفحات همپتانسیل عمود است.

مثال ۸. پتانسیل موجود بین دو استوانه هم محور به شعاعهای ۵ و ۱۰ را بیابید. در صورتی که اختلاف پتانسیل های موجود بر این استوانه ها به ترتیب ۱۱۰ و ۲۲۰ ولت باشد.

حل. معادله لاپلاس در مختصات استوانه ای به صورت $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$ است که با توجه به وجود استوانه های همپتانسیل کافی است پتانسیل مورد نظر را از حل مسئله زیر به دست آوریم

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0; \quad u(5) = 110, \quad u(10) = 220$$

با انتگرالگیری از $\frac{u_r}{u_r} = -\frac{1}{r}$ می یابیم $\ln \frac{u_r}{a} = \ln \frac{1}{r}$ و یا $u_r = \frac{a}{r}$ و با انتگرالگیری مجدد داریم

$$u = a \ln r + b$$

و با توجه به شرایط مرزی به دست می آوریم

$$u = \frac{110}{\ln 2} \ln r + 110 \left(1 - \frac{\ln 5}{\ln 2} \right)$$

مثال ۹. چنانچه توزیع حرارت در فضای بین دو کره به شعاعهای ۵ و ۱۰ در حالت پایا بوده و کره ها به ترتیب در درجه حرارت ثابت ۱۰ و ۵ باشد تابع درجه حرارت را در داخل دو کره بیابید.

معادله لاپلاس در مختصات کروی به صورت

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

است که به علت وجود کره های همدم مقدار درجه حرارت در فضای بین دو کره را می توان

از حل مسئله زیر به دست آورد

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = 0; \quad u(5) = 10, \quad u(10) = 5$$

با توجه به معادله مسئله می یابیم

$$u = -\frac{a}{r} + b \quad \text{و یا} \quad r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = a$$

با استفاده از شرایط کرانه‌ای مسئله نتیجه می شود

$$u = \frac{50}{r}$$

هم اکنون به حل مسئله لاپلاس یا پواسن در فضای دو بعدی می پردازیم. چگونگی حل این گونه مسائل را با حل یک مسئله روشن می کنیم.

مثال ۱۰. مطلوب است حل مسائل زیر

$$u_{xx} + u_{yy} = x + 2y \quad ; \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

$$u(x, 0) = x \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(x, \pi) = 2 \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, y) = y \quad ; \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$u(\pi, y) = \cos y \quad ; \quad 0 \leq y \leq \pi$$

حل. قرار می دهیم $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$ و w را چنان می یابیم که $v(x, 0) = 0$ و

$v(x, \pi) = 0$, برای این منظور فرض می کنیم $w(x, y) = ay + b$ و با توجه به شرایط مسئله و

نیازهای فوق می یابیم $b = x$, $a = \frac{2-x}{\pi}$, و از آنجا داریم

$$u(x, y) = v(x, y) + \frac{2-x}{\pi} y + x \quad \text{و} \quad w(x, y) = \frac{2-x}{\pi} y + x$$

با توجه به $u(0, y) = y$ و $u(\pi, y) = \cos y$ به ترتیب می یابیم

$$v(\pi, y) = \cos y - \frac{2-\pi}{\pi} y - \pi \quad \text{و} \quad v(0, y) = (1 - \frac{2}{\pi}) y$$

بنابراین مسئله زیر را برای v داریم

$$v_{xx} + v_{yy} = x + 2y \quad ; \quad v(x, 0) = 0$$

$$v(x, \pi) = 0, \quad v(0, y) = \left(1 - \frac{y}{\pi}\right)y, \quad v(\pi, y) = \cos y - \frac{y - \pi}{\pi}y$$

با فرض $v(x, y) = F(x)G(y)$ و درج آن در معادله $v_{xx} + v_{yy} = 0$ می یابیم

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k$$

و از آنجا به دو معادله دیفرانسیل زیر می رسیم .

$$G'' + kG = 0 \quad \text{و} \quad F'' - kF = 0$$

با توجه به شرایط اول و دوم مسئله مربوط به v می یابیم $G(0) = 0$ و $G(\pi) = 0$ و از آنجا

$$\text{داریم } k = n^2 \text{ و } G_n(y) = \sin ny$$

هم اکنون برای حل مسئله مربوط به v به جستجوی جوابی به صورت

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \sin ny$$

می پردازیم. با درج آن در معادله می یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (F_n'' - n^2 F_n) \sin ny = x + y$$

و از آنجا F_n را طوری می یابیم که

$$F_n'' - n^2 F_n = \frac{y}{\pi} \int_0^{\pi} (x + y) \sin ny \, dy = a_n x + b_n$$

که در آن

$$a_n = -\frac{y}{n\pi} [(-1)^n - 1], \quad b_n = -\frac{y}{n} (-1)^{n+1}$$

و جواب عمومی معادله فوق عبارت است از

$$F_n(x) = -\frac{a_n}{n^2} x - \frac{b_n}{n^2} + A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}$$

و از آنجا

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a_n}{n^2} x - \frac{b_n}{n^2} + A_n e^{nx} + B_n e^{-nx} \right) \sin ny$$

با توجه به شرایط سوم و چهارم مربوط به مسئله v به ترتیب می یابیم

$$v(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n^2} + A_n + B_n \right] \sin ny = \left(1 - \frac{y}{\pi} \right) y$$

$$V(\pi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n^2} - \frac{a_n}{n^2} \pi + A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} \right] \sin ny = \cos y - \frac{y-x}{\pi} y - \pi$$

و از آنجا

$$A_n + B_n = \frac{b_n}{n^2} + \frac{y}{\pi} \left(1 - \frac{y}{\pi} \right) \int_0^{\pi} y \sin ny \, dy$$

$$A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} = \frac{b_n}{n^2} + \frac{a_n}{n^2} \pi + \frac{y}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos y - \frac{y-x}{\pi} y - \pi) \sin ny \, dy$$

با حل این دو معادله A_n و B_n را محاسبه می‌کنیم و با توجه به آن $v(x, y)$ مشخص می‌شود و با

درج آن در $u(x, y) = v(x, y) + \frac{y-x}{\pi} y + x$ جواب مسئله مورد نظر حاصل می‌شود

در بخش آینده به حل مسئله لاپلاس در مختصات کروی و حل مسئله موج برای یک

دایره می‌پردازیم. برای حل چنین مسائلی نیاز به شناخت جوابهای معادلات لژاندار و بسل

داریم. در ذیل به ارائه این جوابها و بررسی برخی از خواص آنها تا آنجائی که نیازهای آتی ما

را برطرف کند می‌پردازیم. علاقمندان برای آشنائی بیشتر با جوابهای معادلات لژاندار و بسل

می‌توانند به کتب معادلات دیفرانسیل مراجعه کنند. هر معادله به صورت

$$(1-x^2)G'' - 2xG' + n(n+1)G = 0$$

که در آن n عددی طبیعی است به معادله لژاندر موسوم است. یکی از جوابهای این معادله که

به چند جمله‌ای لژاندر موسوم است و برابر است با

$$P_n(x) = \frac{(\gamma_n)!}{\gamma^n (n!)^2} x^n - \frac{(\gamma_n - 2)!}{\gamma^n 1! (n-1)! (n-2)!} x^{n-2} + \dots =$$

$$\sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^m m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m}$$

که در آن $M = \frac{n}{2}$ یا $M = \frac{1}{2}(n-1)$ به ترتیب وقتی که n زوج یا فرد باشد. با توجه به آن

می‌یابیم

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad p_3(x) = \frac{1}{2}(\Delta x^3 - 3x),$$

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

توجه کنید که دنباله توابع لژاندر $\{P_n(x)\}_{n=1}$ در فاصله $-1 \leq x \leq 1$ متعامدند و داریم:

$$\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) dx = \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & ; n = m \end{cases}$$

هر تابع به صورت $-1 \leq x \leq 1$ و $f(x) = y$ را می‌توان به صورت یک سری نامتناهی از چند جمله‌ای‌های لژاندر نوشت در واقع با قرار دادن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x)$$

و ضرب طرفین آن در $p_m(x)$ و انتگرالگیری از آن در فاصله -1 تا 1 می‌یابیم

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) p_m(x) dx$$

و با تبدیل m به n داریم

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) p_n(x) dx$$

هم اکنون به بررسی معادله بسل می‌پردازیم. هر معادله به صورت

$$x^2 w'' + x w' + (x^2 - \nu^2) w = 0.$$

که در آن ν عددی حقیقی است به معادله بسل از مرتبه ν ام موسوم است. به ازای هر عدد

غیر صحیح ν این معادله دارای دو جواب مستقل خطی به صورت زیر است

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m-\nu+1)}$$

$$J_{\nu}(x) = x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

که در آن $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ به تابع گاما موسوم است در ضمن

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

و به ازای هر عدد صحیح $\alpha=n$ داریم

$$\Gamma(n+1) = n!$$

چنانچه ν عددی صحیح باشد $\nu=n$ آنگاه در جواب $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ وابسته خطی بوده و داریم

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

توابع $J_0(x)$ و $J_1(x)$ در بحثهای آینده از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و مقادیر آنها عبارت‌اند از

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3(1!)(2!)} + \frac{x^5}{2^5(2!)(3!)} - \frac{x^7}{2^7(3!)(4!)} + \dots$$

در حالت $\nu=n$ جواب دوم معادله بسل دارای یک جمله لگاریتمی است و صفر یک نقطه تکین آن است.

معادله $J_n(x) = 0$ دارای بینهایت جواب بوده و پنج جواب اول بزرگتر از صفر آن عبارتند از

$\alpha_1 = 2/4048$, $\alpha_2 = 5/5201$, $\alpha_3 = 8/6537$, $\alpha_4 = 11/7915$, $\alpha_5 = 14/9304$
 چنانچه $\{\alpha_n\}_{n=1}$ یک دنباله دلخواه از جوابهای معادله $J_n(x) = 0$ باشد آنگاه دنباله توابع $\{J_n(\alpha_n x)\}_{n=1}$ در فاصله صفر تا هر عدد ثابت R نسبت به تابع وزن x متعامدند یعنی

$$\int_0^R x J_n(\alpha_n x) J_m(\alpha_m x) dx = \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ \frac{R^2}{2} J_n^2(\alpha_n) & ; n = m \end{cases}$$

هر تابع $0 < x < R$ و $y = f(x)$ را می توان بر حسب یک سری از توابع بسل مرتبه صفرم نوشت یعنی ضرایب ثابت a_n را طوری یافت که

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(\alpha_n x)$$

در واقع با ضرب طرفین آن در $x J_m(\alpha_m x)$ و انتگرالگیری در فاصله صفر تا R می یابیم

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_m^2(\alpha_m)} \int_0^R x f(x) J_m(\alpha_m x) dx$$

و با جایگزین کردن n به جای m در تساوی فوق ضریب a_n محاسبه می شود.

۱۳.۲. حل مسئله لاپلاس برای یک کره

در این بخش به چگونگی حل مسئله لاپلاس برای یک کره به شعاع R می پردازیم و برای این منظور فرض می کنیم مقدار پتانسیل روی کره مشخص بوده و مستقل از زاویه θ باشد یعنی پتانسیل بر سطح کره به صورت تابعی از ϕ باشد. با توجه به این فرض می خواهیم پتانسیل را در نقاط داخل و خارج کره بیابیم برای این منظور کافی است به حل مسئله زیر پردازیم

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad u(R, \phi) = f(\phi)$$

که در آن $f(\phi)$ تابعی مفروض و جواب مسأله بر سطح کره است. چنین مسئله‌ای در واقع یک مسئله داخلی است یعنی با حل آن تنها پتانسیلهای موجود در داخل کره به دست می‌آید. برای مشخص کردن پتانسیل موجود در خارج کره نیاز به شرط نالشی به صورت زیر داریم

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta, \phi) = 0$$

یعنی برای حل مسئله خارجی و پیدا کردن پتانسیلهای موجود در خارج کره، پتانسیل بینهایت را باید برابر صفر اختیار کنیم، در هر صورت به چگونگی حل مسئله می‌پردازیم. نخست توجه می‌کنیم که معادله لاپلاس در مختصات کروی به صورت زیر است

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

و در این مسئله به علت عدم وابستگی u به θ داریم

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = 0$$

برای حل مسئله به جستجوی جوابی به صورت $u(r, \theta) = F(r)G(\phi)$ می‌پردازیم با جایگزین کردن آن در معادله فوق می‌یابیم

$$G \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) + \frac{F}{\sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dG}{d\phi} \right) = 0$$

و یا

$$\frac{1}{F} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) = - \frac{1}{G \sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dG}{d\phi} \right) = k$$

و از آنجا به دو معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) - kF = 0 \\ \frac{1}{\sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dG}{d\phi} \right) + kG = 0 \end{cases}$$

معادله اول یک معادله اولر است. با تغییر متغیر $w = \cos\phi$ معادله دوم به معادله لزاندر تبدیل می شود در واقع با توجه به این فرض و توجه به

$$\sin^2\phi = 1 - w^2, \quad \frac{d}{d\phi} = \frac{d}{dw} \cdot \frac{dw}{d\phi} = -\sin\phi \frac{d}{dw}$$

معادله فوق به صورت زیر در می آید

$$\frac{d}{dw} \left[(1-w^2) \frac{dG}{dw} \right] + kG = 0$$

حال چنانچه چنین اختیار کنیم $k = n(n+1)$ که در آن عددی طبیعی است آنگاه معادله به صورت

$$(1-w^2)G''_n - 2wG'_n + n(n+1)G_n = 0$$

در می آید. $G_n(w)$ را برابر چند جمله ای درجه n ام لزاندر می گیریم
هم اکنون با درج $k = n(n+1)$ در معادله مربوط به F به معادله اولر می رسیم

$$r^2 F'' + 2rF' - n(n+1)F = 0$$

این معادله دارای جواب عمومی به صورت

$$F_n(r) = a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}$$

است و جواب مسئله عبارت است از

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) p_n(\cos\phi)$$

ولی به جهت آنکه پتانسیل در مرکز کره در حالت کلی نمی تواند بینهایت باشد بنابراین برای نقاط داخل کره لازم است فرض کنیم $b_n = 0$ و از آنجا

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n p_n(\cos\phi)$$

با توجه به شرط $u(R, \phi) = f(\phi)$ می یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n p_n(\cos\phi) = f(\phi)$$

چنانچه در $f(\phi)$ قرار دهیم $\phi = \cos^{-1}w$ می یابیم

$$f(\phi) = f(\cos^{-1}w) = g(w)$$

و از آنجا

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n p_n(w) = g(w)$$

بنابراین $a_n R^n$ را برابر ضریب تابع $g(w)$ در بسط این تابع بر حسب چند جمله‌ایهای لژاندر می‌گیریم و با توجه به آن می‌یابیم

$$a_n = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma R^n} \int_{-1}^1 g(w) p_n(w) dw$$

برای ناحیه خارج کره به جهت آنکه پتانسیل در بینهایت صفر است، داریم $a_n = 0$ و از آنجا

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} p_n(\cos \phi)$$

با توجه به شرط $u(R, \phi) = f(\phi)$ می‌یابیم

$$u(R, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} p_n(\cos \phi) = f(\phi)$$

همانند آنچه در فوق برای داخل کره گفته شد کافی است b_n را چنین اختیار کنیم

$$b_n = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma} R^{n+1} \int_{-1}^1 g(w) p_n(w) dw$$

۱۴.۲. حل مسئله ارتعاش یک ناحیه مستدیر

ناحیه‌ای دایره‌ای شکل به شعاع R را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ارتعاش روی کرانه ناحیه برابر صفر بوده، ارتعاش اولیه و سرعت اولیه ارتعاش آن مفروض باشند و ارتعاش در ناحیه تنها به طور شعاعی تغییر کند. چنین مسئله‌ای را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

معادله چنین مسئله‌ای در مختصات قطبی عبارت است از

$$u_{rr} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right)$$

نظر به اینکه ارتعاش در ناحیه به طور شعاعی تغییر کرده و تغییرات آن به θ وابسته نیست معادله فوق به صورت زیر در می آید

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right)$$

با توجه به شرایط مسئله داریم

$$u(r, 0) = f(r) \quad , \quad u_t(r, 0) = g(r) \quad , \quad u(R, t) = 0$$

با فرض $u(r, t) = w(r)G(t)$ و جایگزین کردن آن در معادله می یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{w} \left(w'' + \frac{1}{r} w' \right) = -k^2 \quad \text{یا} \quad w\ddot{G} = c^2 \left(w'' + \frac{1}{r} w' \right) G$$

در اینجا عدد ثابت را منفی اختیار کرده ایم و چنانچه خواهیم دید با چنین انتخابی مسئله دارای جواب خواهد بود. با توجه به معادلات فوق داریم

$$\ddot{G} + c^2 k^2 G = 0 \quad , \quad w'' + \frac{1}{r} w' + k^2 w = 0$$

در معادله دوم تغییر متغیر $s = kr$ می دهیم تا معادله به معادله بسل مرتبه صفرم بدل شود. داریم

$$w' = \frac{dw}{dr} = \frac{dw}{ds} \frac{ds}{dr} = k \frac{dw}{ds}$$

و همینطور

$$w'' = k^2 \frac{d^2 w}{ds^2}$$

و از آنجا معادله به صورت زیر در می آید

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dw}{ds} + w = 0$$

که یک معادله بسل از مرتبه صفرم می باشد و جواب آن $J_0(s)$ است. بنابراین

$$w(r) = J_0(s) = J_0(kr)$$

با توجه به شرط $u(R, t) = 0$ می یابیم

$$J_0(kR) = 0 \quad \text{یا} \quad w(R) = 0$$

و از آنجا لازم است که k را طوری انتخاب کنیم که kR برابر ریشه های J_0 باشد یعنی

$$k = \frac{\alpha_n}{R} \quad \text{که در آن } n = 1, 2, \dots$$

ریشه های J_0 هستند با توجه به آن می یابیم

$$w_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$$

با درج $k = \frac{\alpha_n}{R}$ در معادله مربوط به G می‌یابیم

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0; \lambda_n = c \frac{\alpha_n}{R}$$

که دارای جواب $G_n(t) = a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t$ است. بنابراین

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right)$$

برای تعیین a_n و b_n از شرایط اولیه مسئله استفاده می‌کنیم

$$u(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) = f(r)$$

و با توجه به آن می‌گیریم

$$a_n = \frac{\int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) dr}{R^2 J_0'(\alpha_n)}$$

و همچنین

$$u_t(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) = g(r)$$

و با توجه به آن می‌یابیم

$$b_n = \frac{\int_0^R r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right) dr}{c \alpha_n R J_0'(\alpha_n)}$$

۱۵.۲. حل مسائل با مشتقات جزئی به کمک تبدیلات فوریه و تبدیلات لاپلاس

به کمک تبدیلات فوریه و لاپلاس نیز می‌توان به حل مسائل با مشتقات جزئی پرداخت. در فصل اول با تبدیلات فوریه نامتناهی آشنا شدیم و در اینجا بعد از پرداختن به تعریف تبدیل فوریه متناهی و چند قضیه در مورد این تبدیلات به حل چند مسئله از مسائل با مشتقات

جزئی به کمک این تبدیلات می پردازیم و در پایان با ارائه یک مثال چگونگی حل معادلات با مشتقات جزئی به کمک تبدیل لاپلاس را مورد بررسی قرار می دهیم.

فرض می کنیم $f(x)$ تابعی پیوسته تکه ای در یک فاصله متناهی مثلاً بر فاصله $[0, \pi]$ باشد. آنگاه تبدیل سینوسی فوری متناهی تابع $f(x)$ را که به $F_s\{f\}$ نمایش می دهیم و چنین تعریف می کنیم

$$F_s\{f\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = f_s(n) ; n=1, 2, 3, \dots$$

تبدیل سینوسی فوری متناهی معکوس را نیز چنین تعریف می کنیم.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin nx$$

تبدیلات کسینوسی فوری متناهی و فوری متناهی معکوس را به ترتیب چنین تعریف می کنیم

$$F_c\{f\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = f_c(n) ; n=0, 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} f_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos nx$$

هرگاه $f'(x)$ و $f''(x)$ پیوسته تکه ای بر فاصله $[0, \pi]$ باشند آنگاه می توان ثابت کرد که (ثابت کنید)

$$F_s\{f''\} = \frac{1}{\pi} [f(0) - (-1)^n f(\pi)] - n^2 F_s\{f\}$$

$$F_c\{f''\} = \frac{1}{\pi} [(-1)^n f'(\pi) - f'(\pi)] - n^2 F_c\{f\}$$

مثال ۱. مسئله زیر را به کمک تبدیل فوری حل کنید.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 1 ; 0 < x < \pi , t > 0$$

$$u(x, 0) = 0 \quad ; \quad u_t(x, 0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = 0 \quad ; \quad u(\pi, t) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

حل . مسئله را در حالت کلی یعنی $G(x, t)$ به جای تابع ثابت ۱ حل می‌کنیم. با تبدیل فوریه‌گیری از معادله نتیجه می‌شود

$$F_s\{u_{tt}\} - c^2 F_s\{u_{xx}\} = F_s\{G(x, t)\}$$

$$F_s\{u_{tt}\} = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^\pi u_{tt} \sin nx \, dx = \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\gamma}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) \sin nx \, dx \right] = \frac{d^2 v(n, t)}{dt^2}$$

که در آن $v(n, t)$ تبدیل سینوسی متناهی $u(x, t)$ است. از طرفی داریم

$$F_s\{u_{xx}\} = \frac{\gamma n}{\pi} [u(0, t) - (-1)^n u(\pi, t)] - n^2 v(n, t) = -n^2 v(n, t)$$

چنانچه $F_s(n, t)$ تبدیل سینوسی متناهی $G(x, t)$ باشد آنگاه می‌یابیم

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + n^2 c^2 v = F_s(n, t) = F_s\{1\} = \frac{\gamma}{\pi n} [1 + (-1)^{n+1}]$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است که دارای جوابی به صورت زیر است

$$v(n, t) = A \cos nct + B \sin nct + \frac{\gamma}{\pi c^2 n^2} [1 + (-1)^{n+1}]$$

با به کار بردن شرایط اولیه می‌یابیم

$$F_s\{u(x, 0)\} = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^\pi u(x, 0) \sin nx \, dx = v(n, 0) = 0$$

و

$$F_s\{u_t(x, 0)\} = \frac{dv(n, 0)}{dt} = 0$$

داریم $B = 0$ و

$$A = \frac{\gamma}{\pi c^2 n^2} [(-1)^n - 1]$$

از اینرو

$$v(n,t) = \frac{2}{\pi c^2 n^2} [1 + (-1)^{n+1}] (1 - \cos nct)$$

بنابراین

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{n+1}]}{n^2} (1 - \cos nct) \sin nx$$

مثال ۲. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_t = u_{xx} + u \quad ; \quad 0 < x < l \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_x(0, t) = 0 \quad u_x(l, t) = 0$$

چنانچه $V(n,t)$ تبدیل کسینوسی $u(x,t)$ باشد با تبدیل کسینوسی گرفتن از طرفین معادله و به کار بردن شرایط کرانه‌ای می‌یابیم

$$V_t + (n^2 - 1) V = 0$$

و جواب آن عبارت است از

$$V(n,t) = ce^{-(n^2-1)t}$$

با به کار بردن شرایط اولیه نتیجه می‌گیریم

$$V(n,t) = V(n, 0) e^{-(n^2-1)t}$$

که در آن

$$V(n, 0) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

بنابر این جواب عبارت است از

$$u(x,t) = \frac{1}{2} V(0, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} V(n,t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

به ازای $V(0, 0) = \pi$ داریم $f(x) = x; 0 < x < \pi$ و

$$V(n, 0) = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

و جواب مسئله به ازای $f(x) = x$ عبارت است از

$$u(x,t) = \frac{\pi}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] e^{-(n^2-1)t} \cos nx$$

مثال ۳. درجه حرارت در یک میله نامتناهی را بیابید در صورتی که

$$u(x,0) = f(x); \quad -\infty < x < \infty$$

و به ازای هر $t \geq 0$ داریم

$$u(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{و} \quad u_x(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{که} \quad |x| \rightarrow \infty$$

حل. با تبدیل فوریه نامتناهی گرفتن از معادله می‌یابیم

$$F\{u_t\} = c^2 F\{u_{xx}\} = c^2 (-w^2) F\{u\} = -c^2 w^2 \bar{u}$$

که در آن \bar{u} تبدیل فوریه u است. از طرفی داریم

$$F\{u_t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iwx} dx = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

بنابراین

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -c^2 w^2 \bar{u}$$

این معادله دیفرانسیل مرتبه اول دارای جواب

$$\bar{u}(w,t) = a(w) e^{-c^2 w^2 t}$$

است. از روی شرط اولیه $\bar{u}(w,0) = a(w) = \bar{f}(w) = F\{f\}$ و بنابراین

$$\bar{u}(w,t) = \bar{f}(w) e^{-c^2 w^2 t}$$

با تبدیل معکوس گیری داریم

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw$$

با جایگزین کردن

$$\bar{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i w v} dv$$

در $u(x,t)$ می‌یابیم

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 w^2 t} e^{i(wx-wv)} dw \right] dv$$

با استفاده از فرمول اویلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ و توجه به اینکه انتگرال قسمت موهومی نسبت به w فرد است نتیجه می شود

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_0^{\infty} e^{-c^2 w^2 t} \cos((x-v)w) dw \right] dv$$

به کمک تبدیل لاپلاس نیز می توان به حل معادلات با مشتقات جزئی پرداخت. برای روشن شدن به حل مسئله زیر به کمک تبدیل لاپلاس می پردازیم.

مثال ۴. مسئله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(0,t) = f(t) = \begin{cases} \sin t & ; 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 & ; \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x,t) = 0 ; t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0$$

حل. با تبدیل لاپلاس گیری نسبت به t می یابیم

$$L\{u_{tt}\} = s^2 L\{u\} - su(x,0) - L\{u_t(x,0)\} = c^2 L\{u_{xx}\}$$

ولی

$$L\{u_{xx}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u_{xx} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t) dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L\{u(x,t)\}$$

با نوشتن $V(x,s) = L\{u(x,t)\}$ داریم

$$V_{xx} - \frac{s^2}{c^2} V = 0$$

و یا

$$S^2 V = c^2 V_{xx}$$

که یک معادله دیفرانسیل معمولی است و دارای جواب عمومی

$$V(x,s) = a(s)e^{(sx)/c} + b(s)e^{(-sx)/c}$$

است با توجه به شرط کرانه‌ای و نوشتن $F(s) = L\{f(t)\}$ می‌یابیم

$$V(\cdot, s) = L\{u(\cdot, t)\} = L\{f(t)\} = F(s)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x,s) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-sx} u(x,t) dt = \int_0^{\infty} e^{-sx} \lim_{x \rightarrow \infty} u(x,t) dt = 0$$

و این موضوع ایجاب می‌کند که $a(s) = 0$

$$V(\cdot, s) = b(s) = F(s)$$

در نتیجه

$$V(x,s) = F(s) e^{(-sx)/c}$$

با توجه به قضیه دوم انتقال تبدیلات لاپلاس و به ازای $a = \frac{x}{c}$ و با تبدیل معکوس‌گیری

می‌یابیم

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) H\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

و یا

$$u(x,t) = \begin{cases} \sin\left(t - \frac{x}{c}\right) & ; \frac{x}{c} < t < \frac{x}{c} + 2\pi \\ 0 & ; \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۱۶.۲. مسائل حل شده

۱ - جواب مسئله زیر را به دست آورید

$$u_{tt} = u_{xx}; u(x, 0) = \sin x + \sin 3x, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \sin 3x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \begin{cases} 0 & ; n \neq 1, 3 \\ 1 & ; n = 1 \text{ یا } n = 3 \end{cases}$$

بنابراین

$$u(x,t) = \sin x \cos t + \sin^3 x \cos^3 t$$

۲- جواب عمومی دستگاه معادلات $u_{xx} = 0$ و $u_{yy} = 0$ را بیابید.

از $u_{xx} = 0$ می‌بایم $u = x\phi(y) + \psi(y)$ و از آنجا

$$u_{yy} = x\phi''(y) + \psi''(y) = 0$$

بنابراین

$$\phi''(y) = 0 \quad \text{و} \quad \psi''(y) = 0$$

در نتیجه

$$\psi(y) = cy + d \quad \text{و} \quad \phi(y) = ay + b$$

بنابراین

$$u = x(ay + b) + cy + d = axy + bx + cy + d$$

۳- جواب عمومی معادله $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$ را بیابید.

داریم $u_{xy} + u_x = -(x + y + 1)$ نخست جواب عمومی معادله بدون طرف ثانی یعنی جواب

معادله $u_{xy} + u_x = 0$ را می‌یابیم. با فرض $u_x = p$ می‌یابیم $p_y + p = 0$ و یا $\frac{p_y}{p} = -1$ و در نتیجه

$\ln \frac{p}{h(x)} = -y$ و از آنجا $p = h(x)e^{-y}$ و یک جواب خصوص معادله $p_y + p = -(x + y + 1)$ عبارت

است از $p = -(x + y)$ و در نتیجه این معادله دارای جواب عمومی

$$p = h(x)e^{-y} - (x + y)$$

است. با توجه به آنکه $p = u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ داریم

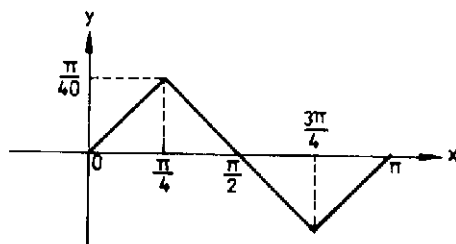
$$\frac{\partial u}{\partial x} = h(x)e^{-y} - (x + y)$$

و از آنجا

$$u = e^{-y} \int h(x) dx - \frac{x^2}{2} - xy + \psi(y) = \phi(x)e^{-y} + \psi(y) - \frac{x^2}{2} - xy$$

۴- مسئله موج را در حالتی حل کنید که $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ، $u_t(x, 0) = 0$ و انحراف اولیه برابر باشد

با



$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x}{1.0} ; & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{1.0} (-x + \frac{\pi}{4}) ; & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ \frac{1}{1.0} (x - \pi) ; & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi/4} \frac{x}{1.0} \sin nx \, dx + \right.$$

$$\left. \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(-\frac{x}{1.0} + \frac{\pi}{4}\right) \sin nx \, dx + \int_{3\pi/4}^{\pi} \left(\frac{x}{1.0} - \frac{\pi}{4}\right) \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{4}$$

و از آنجا

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{4} \cos cnt \sin nx$$

۵- معادله $u_x = yu_y$ را به روش ضربی حل کنید.

با فرض $u(x, y) = F(x)G(y)$ می‌یابیم $F'G = yFG'$ و یا

$$\frac{F'}{F} = \frac{yG'}{G} = k$$

با توجه به آن داریم

$$\frac{G'}{G} = \frac{k}{y} \quad , \quad \frac{F'}{F} = k$$

که به ترتیب دارای جوابهای عمومی $F = ae^{kx}$ و $G = y^k$ است بنابراین

$$u(x,y) = ay^k e^{kx}$$

۶- معادله $u_x + u_y = \gamma(x+y)u$ را به روش ضربی حل کنید.

با فرض $u(x,y) = F(x)G(y)$ و جایگزین کردن آن در معادله می یابیم

$$F'G + FG' = \gamma(x+y)FG$$

و یا

$$\frac{F'}{F} \cdot \gamma x = -\frac{G'}{G} + \gamma y = k$$

و از آنجا به دو معادله زیر می رسیم

$$\frac{G'}{G} = \gamma y - k \quad \text{و} \quad \frac{F'}{F} = \gamma x + k$$

جوابهای این معادلات عبارت اند از

$$G = e^{\gamma y - ky} \quad \text{و} \quad F = ce^{\gamma x + kx}$$

بنابراین

$$u = ce^{\gamma x + y^2 + k(x-y)}$$

۷- معادله $u_{xx} + u_{yy} = 0$ را به روش ضربی حل کنید.

با قراردادن $u(x,y) = F(x)G(y)$ در معادله می یابیم $F''G + FG'' = 0$ و یا $\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = K$

با فرض $k = \mu^2$ می یابیم $F'' - \mu^2 F = 0$ و $G'' + \mu^2 G = 0$ که دارای جوابهای

$$G = c \cos \mu y + d \sin \mu y \quad \text{و} \quad F = a \cosh \mu x + b \sinh \mu x$$

و

$$u(x,y) = (a \cosh \mu x + b \sinh \mu x) (c \cos \mu y + d \sin \mu y)$$

و همینطور به ازای $k = -p^2$ می یابیم

$$u(x,y) = (a \cos px + b \sin px) (c \cosh py + d \sinh py)$$

به ازای $k = 0$ نتیجه می شود $F'' = 0$ و $G'' = 0$ و از آنجا

$$u(x,y) = (ax+b)(cy+d), \quad G = cy+d, \quad F = ax+b$$

۸- با توجه به تغییر متغیر $v=x$ و $z=xy$ معادله $u_{xy} = yu_{yy} + u_y$ را حل کنید. داریم

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + yu_z$$

$$u_y = u_v v_y + u_z z_y = xu_z$$

و

$$u_{xy} = (u_v + yu_z)_y = u_{vy} + u_z + yu_{zy} = u_{vv}v_y + u_{vz}z_y + u_z + y(u_{zv}v_y + u_{zz}z_y) = xu_{vz} + u_z + xyu_{zz}$$

و

$$u_{yy} = x^2 u_{zz}$$

با جایگزین کردن این عبارات در معادله می‌بایم

$$x^2 u_{vz} + xu_z + x^2 y u_{zz} = x^2 y u_{zz} + xu_z$$

و از آنجا $u_{vz} = 0$ دارای جواب عمومی $u = \phi(v) + \psi(z)$ است و بنابراین معادله مورد نظر دارای جواب عمومی $u(x,y) = \phi(x) + \psi(xy)$ است.

۹- دما در یک میله به طول ده سانتیمتر را بیابید در صورتی که دما در دو سر میله در درجه حرارت صفر بوده و میله از جنس نقره با سطح مقطع 1 cm^2 ، چگالی 10.6 gm/cm^3 ، ضریب هدایت گرما $1.04 \frac{\text{cal}}{\text{cm degsec}}$ و گرمای ویژه $0.056 \text{ cal/gm de g}$ باشد. سطح جانبی آن کاملاً عایق پوش است و درجه حرارت اولیه برابر است با

$$\text{الف: } f(x) = \sin 0.1\pi x \quad \text{ب: } f(x) = x(10-x)$$

داریم

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{10} x$$

$$c^2 = \frac{k}{\rho\sigma} = \frac{1.04}{10.6 \times 0.056} = 1.752$$

$$\lambda_n^2 = \frac{c^2 n^2 \pi^2}{100} = 0.1732 n^2$$

$$a_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} f(x) \sin \frac{n\pi}{10} x dx$$

و

به ازای $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$ می‌یابیم

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} x \sin \frac{n\pi}{1} x dx = \begin{cases} 0; & n \neq 1 \\ 1; & n = 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$u(x,t) = e^{-1/17 \pi^2 t} \sin \frac{\pi}{1} x$$

به ازای $f(x) = x(1-x)$

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x(1-x) \sin \frac{n\pi}{1} x dx = \frac{4}{\pi n^3} (1 + (-1)^{n+1})$$

از اینرو

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3} (1 + (-1)^{n+1}) e^{-1/17 \pi^2 n^2 t} \sin \frac{n\pi}{1} x$$

۱۰ - درجه حرارت در یک میله نامتناهی به ازای $c=1$ را بیابید در صورتی درجه حرارت

اولیه برابر باشد با

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 < x < 1 \\ 2-x; & 1 < x < 2 \\ 0; & x > 2 \end{cases}; \quad f(-x) = f(x)$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} (a(w) \cos wx + b(w) \sin wx) e^{-w^2 t} dw$$

$$a(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^2 f(x) \cos wx dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 x \cos wx dx + \int_1^2 (2-x) \cos wx dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi w^2} (\gamma \cos w - \cos \gamma w - 1)$$

و $b(w) = 0$ از آنجا

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{w^2} (\gamma \cos w - \cos \gamma w - 1) \cos wx e^{-w^2 t} dw$$

۱۱ - مقدار انحراف $u(x,y,t)$ در یک غشای مربعی $a=b=1$ را بیابید در صورتی که ارتعاش روی لبه‌های آن صفر، سرعت اولیه صفر و انحراف اولیه برابر باشد با

$$f(x,y) = xy(1-x^2)(1-y^2)$$

داریم

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \lambda_{mn} t) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

که در آن $\lambda_{mn} = \pi \sqrt{m^2 + n^2}$

$$a_{mn} = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 xy(1-x^2)(1-y^2) \sin m\pi x \sin n\pi y \, dx \, dy$$

داریم

$$\int_0^1 x(1-x^2) \sin m\pi x \, dx = \frac{(-1)^{m+1}}{m^2 \pi^2}$$

و از آنجا

$$a_{mn} = \frac{1}{4} \frac{(-1)^{m+n}}{\pi^2 m^2 n^2}$$

و $b_{mn} = 0$ بنابراین

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m^2 n^2} \cos \pi \sqrt{m^2 + n^2} t \sin n\pi y \sin m\pi x$$

۱۲. مطلوبست حل مسئله زیر

$$u_t - u_{xx} = x; \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 2x; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_x(0, t) = t; \quad u(1, t) = t^2, \quad t \geq 0$$

حل. می‌نویسیم

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

w را طوری می‌یابیم که $v_x(0,t) = 0$ و $v(1,t) = 0$ برای این منظور می‌نویسیم

$$w(x,t) = a(t)x + b(t) \text{ و از آنجا}$$

$$a(t) = t \quad \text{یا} \quad t = 0 + a(t) \quad \text{و یا} \quad u_x(0,t) = v_x(0,t) + w_x(0,t)$$

$$b(t) = t^2 - t \quad \text{یا} \quad t^2 = 0 + t + b(t) \quad \text{و یا} \quad u(1,t) = v(1,t) + w(1,t)$$

در نتیجه

$$w(x,t) = xt + t^2 - t = (x-1)t + t^2$$

و

$$u(x,t) = (x-1)t + t^2 + v(x,t)$$

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0)$$

$$v(x,0) = 2x \quad \text{و یا} \quad 2x = v(x,0)$$

$$u_{xx} = v_{xx}, \quad u_x = v_x + t \quad \text{و} \quad u_t = v_t + w_t = v_t + x - 1 + 2t$$

در نتیجه مسئله زیر را داریم

$$v_t - v_{xx} = 1 - 2t, \quad v(x,0) = 2x, \quad v_x(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0$$

برای حل این مسئله به روش تفکیک متغیرها با فرض $v(x,t) = F(x)G(t)$ تابع F را طوری می‌یابیم که در مسئله زیر صدق کند

$$F'' - kF = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F(1) = 0$$

این مسئله دارای جواب $F_n(x) = \cos k_n x$ که در آن $k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ و هم اکنون با جایگزین کردن $k = -k_n^2 = -(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4}$

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \cos k_n x$$

در معادله $v_t - v_{xx} = 1 - 2t$ می‌یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\dot{G}_n + k_n^2 G_n) \cos k_n x = 1 - 2t$$

حال G را طوری می یابیم که

$$\ddot{G}_n + k_n^2 G_n = 2 \int_0^1 (1-2t) \cos k_n x dx = 2(1-2t) \frac{\sin k_n}{k_n} = c_1 t + c_2$$

و از آنجا

$$G_n(t) = A_n e^{-k_n^2 t} + \frac{c_1}{1+k_n^2} t + \frac{c_2}{k_n^2}$$

بنابراین

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{-k_n^2 t} + \frac{c_1}{1+k_n^2} t + \frac{c_2}{k_n^2}) \cos k_n x ; k_n = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

با توجه به $v(x,0) = 2x$ می یابیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n + \frac{c_2}{k_n^2}) \cos k_n x = 2x$$

بنابراین فرض می کنیم

$$A_n + \frac{c_2}{k_n^2} = 2 \int_0^1 2x \cos k_n x dx = \frac{4}{k_n^2} [k_n \sin k_n - 1]$$

و یا

$$A_n = \frac{1}{k_n^2} [4((-1)^n k_n - 1) - c_2]$$

و در نتیجه

$$u(x,t) = (x-1)t + t^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k_n^2} [4((-1)^n k_n - 1) - c_2] e^{-k_n^2 t} + \frac{c_1}{1+k_n^2} + \frac{c_2}{k_n^2} \right\} \cos k_n x$$

مثال ۱۳. مطلوب است حل مسئله بواسن زیر

$$u_{xx} + u_{yy} = x + 2y ; 0 < x < \pi ; 0 < y < \pi$$

$$u(x,0) = x , u(x,\pi) = 2 , 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0,y) = y , u(\pi,y) = \cos y , 0 \leq y \leq \pi$$

حل. به جستجوی جوابی برای مسئله به صورت $u(x,y) = V(x,y) + w(x,y)$ می پردازیم و

w را طوری می یابیم که $V(\pi,y) = 0, V(0,y) = 0$. برای این منظور می نویسیم

$$w(x,y) = a(y)x + b(y)$$

$$b(y) = y, \quad y = 0 + b(y) \quad \text{و یا} \quad u(0,y) = V(0,y) + w(0,y)$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi} (\cos y - y), \quad \cos y = a\pi + y \quad \text{و یا} \quad u(\pi,y) = V(\pi,y) + w(\pi,y)$$

در نتیجه

$$u(x,y) = \frac{x}{\pi} (\cos y - y) + y + V(x,y)$$

و

$$w(x,y) = \frac{x}{\pi} (\cos y - y) + y$$

$$\text{از } u(x,0) = V(x,0) + w(x,0) \text{ نتیجه می شود}$$

$$V(x,0) = (1 - \frac{1}{\pi})x \quad \text{و یا} \quad x = V(x,0) + \frac{x}{\pi}$$

همینطور

$$V(x,\pi) = \frac{x}{\pi} (1 + \pi) - \pi + 2 \quad \text{و یا} \quad u(x,\pi) = V(x,\pi) + w(x,\pi)$$

و

$$u_{yy} = V_{yy} - \frac{x}{\pi} \cos y \quad \quad u_{xx} = V_{xx}$$

در نتیجه مسئله زیر را برای V داریم

$$V_{xx} + V_{yy} = x + 2y + \frac{x}{\pi} \cos y; \quad V(x,0) = (1 - \frac{1}{\pi})x, \quad V(x,\pi) = \frac{1}{\pi} (1 + \pi)x - \pi + 2$$

$$V(0,y) = 0, \quad V(\pi,y) = 0$$

نخست به حل مسئله بدون طرف ثانی به روش ضربی با فرض $u(x,y) = F(x)G(y)$ می پردازیم و به مسئله زیر برای F می رسم

$$F'' - kF = 0; \quad F(0) = 0, \quad F(\pi) = 0$$

که از آن نتیجه می شود $k = -n^2$ و $F_n(x) = \sin nx$

حال به جستجوی جوابی به صورت

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(y) \sin nx$$

برای مسئله مربوط به V می پردازیم. با درج آن در $V_{xx} + V_{yy} = x + 2y + \frac{x}{\pi} \cos y$ می یابیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{G}_n - n^2 G_n) \sin nx = x + 2y + \frac{x}{\pi} \cos y$$

و از آنجا G را طوری می یابیم که

$$\ddot{G}_n - n^2 G_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (x + 2y + \frac{x}{\pi} \cos y) \sin nx \, dx$$

در نتیجه

$$G_n(t) = a_n \cosh ny + b_n \sinh ny + G_n^*(y)$$

که در آن $G_n^*(y)$ یک جواب خصوص معادله فوق است ($G_n^*(y)$ را بیابید) و

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cosh ny + b_n \sinh ny + G_n^*(y)) \sin nx$$

با توجه به شرایط کرانه ای می یابیم

$$V(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + G_n^*(0)) \sin nx = (1 - \frac{1}{\pi}) x$$

$$V(x,\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cosh n\pi + b_n \sinh n\pi + G_n^*(\pi)) \sin nx = \frac{1}{\pi} (1 + \pi)x - \pi + 2$$

و از آنجا

$$a_n + G_n^*(0) = \frac{1}{\pi} (1 - \frac{1}{\pi}) \int_0^{\infty} x \sin nx \, dx = \frac{1}{n\pi} (1 - \frac{1}{\pi}) (-1)^{n+1}$$

فصل دوم (۱۳۷)

$$a_n \cosh n\pi + b_n \sinh n\pi + G_n^*(\pi) = \frac{\gamma}{n\pi} (1+\pi)(-1)^{n+1} + (\gamma-\pi) \frac{\gamma}{\pi} ((-1)^{n+1} + 1)$$

که با حل آنها a_n و b_n محاسبه می شوند.

مثال ۱۴. مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + x + y + t; \quad 0 \leq x \leq \pi \quad 0 \leq y \leq \pi \quad t \geq 0$$

$$u(x, y, 0) = x + \gamma y, \quad u_t(x, y, 0) = \gamma x - y$$

$$u(0, y, t) = y + t, \quad u(\pi, y, t) = y - t$$

$$u(x, \pi, t) = \gamma x - t, \quad u(x, 0, t) = x - \gamma t$$

حل. با فرض $u(x, y, t) = V(x, y, t) + w(x, y, t)$ و $w = ax + b$ را طوری می یابیم که $V(0, y, t) = V(\pi, y, t) = 0$ و از آنجا

$$w = -\frac{\gamma t}{\pi} x + y + t$$

و مسئله برای V عبارت است از

$$V_{tt} = V_{xx} + V_{yy} + y + x + t$$

$$V(x, y, 0) = y + x; \quad V_t(x, y, 0) = \gamma x - y + \frac{\gamma x}{\pi} - 1$$

$$V(0, y, t) = 0; \quad V(\pi, y, t) = 0$$

$$V(x, 0, t) = x - \gamma t + \frac{\gamma t}{\pi} x; \quad V(x, \pi, t) = \gamma x - \gamma t + \frac{\gamma t}{\pi} x - \pi$$

هم اکنون از تبدیل فوریه استفاده می کنیم و با قرار دادن

$$H = F_s(V) = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^\pi V(x, y, t) \sin nx \, dx$$

و تبدیل فوریه گرفتن از معادله مربوط به V می یابیم

$$H_{tt} = -n^2 H + H_{yy} + \frac{\gamma}{\pi} \int_0^\pi (x + y + t) \sin nx \, dx$$

با فرض

$$A = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{\gamma}{n} (-1)^{n+1}$$

$$B = \frac{Y}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \frac{Y}{n\pi} (1 + (-1)^{n+1})$$

می‌یابیم

$$H_{xx} + n^2 H - H_{yy} = A + B(y+t)$$

$$H(n, y, 0) = By + A, \quad H_t(n, y, 0) = \left(\gamma + \frac{Y}{\pi}\right) A - (\gamma + 1)B$$

$$H(n, 0, t) = \left(1 + \frac{Yt}{\pi}\right) A - \gamma t B$$

$$H(n, \pi, t) = \left(\gamma + \frac{Yt}{\pi}\right) A - (\gamma t + \pi)B$$

حال چنین قرار می‌دهیم

$$H(n, y, t) = Q(n, y, t) + R(n, y, t)$$

و $R(n, y, t) = ay + b$ را طوری می‌یابیم که $Q(n, 0, t) = Q(n, \pi, t) = 0$ برای برقرار بودن این شرایط لازم است که

$$R(n, y, t) = \frac{Y}{\pi} (A + Bt - B\pi) + A\left(1 + \frac{Yt}{\pi}\right) - \gamma Bt$$

با توجه به آن مسئله برای Q به صورت زیر در می‌آید

$$Q_{xx} - Q_{yy} + n^2 Q = A + (y+t)B - n^2 \left[(A + Bt - B\pi) \frac{Y}{\pi} + A\left(1 + \frac{Yt}{\pi}\right) - \gamma Bt \right]$$

$$Q(n, y, 0) = -A \frac{Y}{\pi} + \gamma By$$

$$Q_t(n, y, 0) = \gamma A - By + \gamma B - \frac{B}{\pi} y$$

$$Q(n, 0, t) = Q(n, \pi, t) = 0$$

با قرار دادن $Q = \sum_{m=1}^{\infty} G_{mn} \sin my$ در این مسئله می‌توان به حل مسئله پرداخت و به جواب

رسید.

$$Q(n, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ E_{mn} \sin \lambda_{mn} t + F_{mn} \cos \lambda_{mn} t + \frac{c}{\pi \lambda_{mn}^2} [B\pi - n^2 (A + Bt - B\pi)] + \right.$$

$$\frac{D}{\pi \lambda_{mn}^{\gamma}} [A\pi + B\pi t - n^{\gamma} (A\pi + \gamma A t - \gamma B\pi t)] \sin my$$

که در آن

$$c = \frac{\gamma}{m} (-1)^{m+1}, D = \frac{\gamma}{m\pi} [(-1)^{m+1} + 1]$$

$$E_{mn} = \frac{1}{\pi \lambda_{mn}^{\gamma}} \{ \gamma AD (\pi \lambda_{mn}^{\gamma} + n^{\gamma}) + BD\pi (\gamma m^{\gamma} - n^{\gamma} - 1) - \pi Bc \lambda_{mn}^{\gamma} - Bc m^{\gamma} \}$$

$$F_{mn} = \frac{1}{\pi \lambda_{mn}^{\gamma}} \{ AD\pi (n^{\gamma} - 1) - c (m^{\gamma} A - B\pi + n^{\gamma} B\pi - \gamma B\pi m^{\gamma}) \}$$

بنابراین

$$u(x, y, t) = y + t - \gamma \frac{t}{\pi} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma}{\pi} (A + Bt - B\pi) + A \left(1 + \frac{\gamma t}{B} \right) - \gamma Bt \right\} \sin nx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ E_{mn} \sin \lambda_{mn} t + F_{mn} \cos \lambda_{mn} t + \frac{c}{\pi \lambda_{mn}^{\gamma}} [B\pi - n^{\gamma} (A + Bt - B\pi)] \right\}$$

$$+ \frac{D}{\pi \lambda_{mn}^{\gamma}} [A\pi + B\pi t - n^{\gamma} (A\pi + \gamma A t - \gamma B\pi t)] \sin my \sin nx$$

۱۷.۲. تمرینات متفرقه

۱- هر یک از مسائل زیر را حل کنید

a. $u_{xx} - c^{\gamma} u_{xx} = 0$; $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \lambda \sin^{\gamma} x$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$

$$u(x, t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \gamma}}^{\infty} \frac{\gamma \gamma / (-1)^n - 1}{\pi c n^{\gamma} (n^{\gamma} - \gamma)} \sin nct \sin nx \quad \text{.جواب}$$

b. $u_{tt} + au_t + bu = c^{\gamma} u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$

$u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$

$u(0, t) = u(1, t) = 0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n(t) \sin n\pi x \quad \text{جواب}$$

که در آن $a_n = \gamma \int_0^{\pi} f(x) \sin n\pi x \, dx$ و

$$G_n(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t/\gamma} \left(\cosh \alpha t + \frac{\alpha}{\gamma \alpha} \sinh \alpha t \right); & \alpha > 0 \\ e^{-\alpha t/\gamma} \left(1 + \frac{\alpha t}{\gamma} \right); & \alpha = 0 \\ e^{-\alpha t/\gamma} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\gamma \beta} \sin \beta t \right); & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma} [\gamma(b+n^2\pi^2c^2) - \alpha^2]^{1/2}, \quad \alpha = \frac{1}{\gamma} [a^2 - \gamma(b+n^2\pi^2c^2)]^{1/2}$$

c. $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \sinh x$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = u(1,t) = 1$

$$u(x,t) = V(x,t) + w(x,t) \quad \text{جواب.}$$

که در آن

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\gamma \int_0^1 w(x,v) \sin n\pi v \, dv \right] \cos n\pi t \sin n\pi x$$

$$w(x,t) = -c^2 \sinh x + (c^2 \sinh 1)x + 1$$

d. $u_t = \gamma u_{xx}$; $u(x,0) = x^2(1-x)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{n^2 \pi^2} [\gamma (-1)^{n+1} - 1] e^{-\gamma n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \quad \text{جواب.}$$

۲- مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt} - u_{xx} = x + t; \quad u(x,0) = \gamma, \quad u_t(x,0) = x, \quad u(0,t) = \sin t, \quad u(\pi,t) = \gamma t$$

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t); \quad w(x,t) = \frac{\gamma t - \sin t}{\pi} x + \sin t \quad \text{جواب.}$$

$$v(x,t) = a \cos t + b \sin t + \frac{\gamma t}{\pi} + \gamma - \frac{1}{\pi} t \cos t$$

$$+ \sum_{n=\gamma}^{\infty} \left\{ a_n \cos nt + b_n \sin nt + \frac{\gamma}{\pi n^2} [\pi (-1)^{n+1} + ((-1)^{n+1} + 1)t] + \frac{\gamma \sin t}{n(n^2 - 1)\pi} \right\} \sin nx$$

که در آن $b_1 = \gamma - \frac{1 \cdot 0}{\pi}$, $a_n = \frac{\gamma(-1)^n}{n^r}$, $a_1 = 0$

$$b_n = \frac{\gamma(-1)^n}{\pi n^r} [(-1)^{n+1} + \gamma - \pi] + \frac{\gamma((-1)^n - 1)}{\pi n^r} - \frac{\gamma}{\pi(n^r - 1)n^r}$$

۳- مطلوب است حل هر یک از مسائل زیر

a.
$$\begin{cases} u_t - \gamma u_{xx} = xt & ; 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \pi x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = t, u_x(1, t) = t^2 & ; t \geq 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = x \cos t & ; 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_u(x, 0) = \sin x & ; 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = t^2, u(\pi, t) = \gamma t & ; t \geq 0 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t & ; 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = 1, u(1, t) = t^2 & ; t \geq 0 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & ; 0 < x < 1, t > 0 \\ u_t(x, 0) = x, u_u(x, 0) = 0 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ u_{xx}(0, t) = t^2, u_{xx}(1, t) = \cos t & ; t \geq 0 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} u_{tt} - \gamma u_{xx} = xt & ; 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = x, u_t(x, 0) = 0 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ u_{xx}(0, t) = 0, u_x(1, t) = 1 + t & ; t \geq 0 \end{cases}$$

$$f. \begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0; & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2}, & u_t(x, 0) = 1 + x; & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = \frac{\pi}{2}, & u_x(1, t) = 2t; & t \geq 0 \end{cases}$$

۴- نشان دهید که با جانشانی $u = v(x, y, z)e^{iwt}$; $i = \sqrt{-1}$ در معادله موج سه بعدی معادله هلمهولتز

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0; \quad k = \frac{w}{c}$$

حاصل می شود و با توجه به آن و با استفاده از جوابهای معادله موج جوابهای معادله هلمهولتز را بیابید.

۵- مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt} = c^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}); \quad 0 < r < R, \quad 0 < \theta < 2\pi, t > 0$$

$$u(r, \theta, 0) = r \cos \theta, \quad u_t(r, \theta, 0) = 0; \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$u(R, \theta, t) = 0, \quad u(0, \theta, t) = 0; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, t \geq 0$$

۶- مطلوب است حل هر یک از مسائل زیر

$$a. \begin{cases} u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) + xy \sin t; & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) = 0, & u_t(x, y, 0); & 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi \\ u_x(0, y, t) = 0, & u_x(\pi, y, t) = 0; & 0 \leq y \leq \pi, \quad t \geq 0 \\ u_y(x, 0, t) = 0; & u_y(x, \pi, t) = 0; & 0 \leq x \leq \pi; \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} u_t - \nabla^2 (u_{xx} + u_{yy}) = x + y + t; & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) = 0; & 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi \\ u(x, 0, t) = 0, & u(x, \pi, t) = 0; & 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0, y, t) = 0, & u(\pi, y, t) = 0; & 0 \leq x \leq \pi; \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + r + t ; & 0 < r < 1, t > 0 \\ u(r, 0) = r, u_t(r, 0) = \gamma r + 1 ; & 0 \leq r \leq 1 \\ u(1, t) = \gamma t ; & t \geq 0 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} u_{tt} = u_{\theta\theta} ; & 0 < \theta < \pi, t > 0 \\ u(\theta, 0) = \theta, u_t(\theta, 0) = \sin \theta ; & 0 \leq \theta \leq \pi \\ u(0, t) = t, u(\pi, t) = \gamma t ; & t \geq 0 \end{cases}$$

۷- نشان دهید که

$$a. F_s\{f\} = \frac{\gamma n\pi}{l^n} [f(0) - (-1)^n f(l)] - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^n F_s\{f\}$$

$$b. F_c\{f\} = \frac{\gamma}{l} [(-1)^n f(l) - f(0)] - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^n F_c\{f\}$$

و به ازای $l = \pi$

$$F_c\{f\} = \frac{\gamma}{\pi} [(-1)^n f(\pi) - f(0)] - n^n F_c\{f\}$$

۸- هر یک از مسائل زیر را به کمک تبدیل فوریه حل کنید

$$a. u_t = u_{xx} + x + t ; \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = t ; \quad t > 0$$

$$b. u_t = u_{xx} + x + \sin t ; \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = 0 ; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = 0 ; \quad u_x(\pi, t) + \gamma u(\pi, t) = 0$$

$$c. u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0 ; \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(\pi, t) = \sin t; \quad t \geq 0$$

تمرینات ۳a و ۳d را به کمک تبدیلات فوریه حل کنید.

۹- جواب مسئله دیریکله زیر را به کمک تبدیل فوریه بیابید

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad -\infty < x < \infty$$

u وقتی که $y \rightarrow \infty$ کراندار است و u و u_x وقتی که $|x| \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می کند.

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad \text{جواب.}$$

۱۰- جواب مسئله نی من زیر را بیابید

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

$$u_y(x, 0) = g(x); \quad -\infty < x < \infty$$

$$|u| < \infty, \quad u, u_x \rightarrow 0$$

$$y \rightarrow \infty \quad |x| \rightarrow \infty$$

جواب.

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t) dt}{(t-x)^2 + v^2} dv + c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{Ln} \left[\frac{(t-x)^2 + y^2}{(t-x)^2} \right] dt + c$$

۱۱- هر یک از مسائل زیر را به روش تفکیک متغیرها حل کنید. آیا این مسائل به این روش به

جواب یکتا منجر می شوند؟

$$a. \quad u_{tt} - u_{xx} = x + t; \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 2x - 1; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u_{tt}(x, 0) = x + 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = t^2 \quad ; \quad t \geq 0$$

$$u(\pi, t) = t \quad ; \quad t \geq 0$$

$$b. u_t - \nabla^2 u_{xx} = x - t \quad ; \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \cos x \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u_x(0, t) = t \quad ; \quad t \geq 0$$

$$u_{xx}(\pi, t) = t - 1 \quad ; \quad t \geq 0$$

۱۲ - هریک از مسائل زیر را حل کنید.

$$a. u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + \gamma t \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad t \geq 0$$

$$u(x, y, 0) = y, \quad u_t(x, y, 0) = 0$$

$$u(0, y, t) = t + y, \quad u(\pi, y, t) = -y$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, \pi, t) = x - t$$

$$b. u_t = u_{xx} + u_{yy} - x \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad t \geq 0$$

$$u_t(x, y, 0) = 0$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(\pi, y, t) = \gamma$$

$$u(x, 0, t) = \gamma t, \quad u(x, \pi, t) = 0$$

$$c. u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = x - z \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq \pi$$

$$u(0, y, z) = z, \quad u(\pi, y, z) = 0$$

$$u(x, 0, z) = 0, \quad u(x, \pi, z) = x$$

$$u(x, y, 0) = y, \quad u(x, y, \pi) = 0$$

$$d. u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) = \cos x \cos y \cos t ; 0 \leq x \leq \pi , 0 \leq y \leq \pi , t \geq 0$$

$$u(x, y, 0) = \cos x \cos y , u_t(\pi, y, 0) = 0$$

$$u(0, y, t) = \cos y \cos t , u(\pi, y, t) = -\cos y \cos t$$

$$u(x, 0, t) = \cos x \cos t , u(x, \pi, t) = -\cos x \cos t$$

۱۳- هر یک از مسائل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید

$$a. u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t) ; 0 < x < \infty , t > 0$$

$$u(x, 0) = 0 ; 0 \leq x < \infty$$

$$u_t(x, 0) = 0 ; 0 \leq x < \infty$$

$$u(0, t) = 0 ; t \geq 0$$

$$u_x(x, t) \rightarrow 0$$

هرگاه $x \rightarrow \infty$ آنگاه

$$b. u_t = u_{xx} - \gamma u ; 0 < x < \infty , t > 0$$

$$u(x, 0) = 0 ; 0 \leq x < \infty$$

$$u(0, t) = 0 ; t \geq 0$$

$$u(x, t) \rightarrow 0$$

هرگاه $x \rightarrow \infty$ آنگاه

$$c. \alpha^2 u_{xx} = u_t ; 0 < x < \infty ; t > 0$$

$$u(x, 0) = 0 ; 0 \leq x < \infty$$

$$u_x(0, t) = -1 ; t \geq 0$$

$$u(x, t) \rightarrow 0$$

هرگاه $x \rightarrow \infty$ آنگاه

۱۴- مسائل زیر را حل کنید

$$a. u_{xx} + u_{yy} = x - y ; 0 < x < \pi ; 0 < y < \pi$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = x^2; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, y) = 2y, \quad u(\pi, y) = 0; \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$b. \quad u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad 0 < x < \pi; \quad 0 < y < \pi$$

$$u_y(x, 0) = 2x - 1, \quad u_y(x, \pi) = 0; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u_x(0, y) = 1 + y, \quad u_x(\pi, y) = 2; \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$c. \quad u_{xx} + u_{yy} = 1, \quad 0 < x < \pi; \quad 0 < y < \pi$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = \sin x; \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0, y) = \sin 2y, \quad u_x(\pi, y) = 0; \quad 0 < y < \pi$$

$$d. \quad \nabla^2 u = 0; \quad 1 < r < 2, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(1, \theta) = \sin \theta, \quad u(2, \theta) = 0; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0; \quad 1 \leq r \leq 2$$

$$e. \quad \nabla^2 u = 0; \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1$$

$$u(0, y, z) = \sin \pi y \sin \pi z, \quad u(1, y, z) = 0$$

$$u(x, 0, z) = u(x, 1, z) = 0$$

$$u(x, y, 0) = u(x, y, 1) = 0$$

$$f. \quad \nabla^2 u = 0; \quad r < 1; \quad 0 < y < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \phi < \pi$$

$$u(1, \theta, \phi) = \cos^2 \phi$$

فصل سوم

توابع مختلط

۱.۳. اعداد مختلط

در حل معادله $x^2 + 4 = 0$ چنانچه همانند حل معادله $x^2 - 4 = 0$ عمل کنیم می‌یابیم $x^2 = -4$ و یا $x = \pm 2\sqrt{-1}$ گرچه مثلاً $2\sqrt{-1}$ به علت وجود عامل غیر حقیقی $\sqrt{-1}$ در آن یک عدد حقیقی نیست ولی خود یک موجود ریاضی است زیرا تمام عوامل سازنده آن از موجودات ریاضی هستند و علاوه بر آن جواب معادله $x^2 + 4 = 0$ است و می‌توان آن را نه به عنوان یک عدد حقیقی بلکه به عنوان یک موجود ریاضی تحت عنوان یک عدد موهومی محض مورد بحث و بررسی قرار داد. $\sqrt{-1}$ را معمولاً به i نمایش می‌دهند و به ازای هر دو عدد حقیقی x و y $x + iy$ را یک عدد مختلط می‌نامند. گرچه به نظر می‌رسد که چنین تعریفی برای اعداد مختلط یکی از ساده‌ترین تعاریف باشد ولی چنانچه بعداً خواهیم دید ریشه دوم هر عدد، دو عدد مختلط است و این دوگانگی در بحثهای آینده تولید اشکال خواهد کرد. بدین جهت است که اغلب مؤلفین یک عدد مختلط z در صفحه مختلط را به صورت زوج مرتب (x, y) تعریف می‌کنند. x را قسمت حقیقی و y را قسمت موهومی z می‌نامند و می‌نویسند $Rez = x$ و $Imz = y$ بدین طریق به مجموعه‌ای به صورت زیر می‌رسند که به مجموعه اعداد مختلط موسوم است.

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

چنانچه دو عمل جمع و ضرب را برای هر دو عضو $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ از \mathcal{C} به

صورت‌های زیر تعریف کنیم.

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

و

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

آنگاه \mathbb{C} با دو عمل جمع و ضرب ($+$, \times) تشکیل یک میدان می‌دهد. صفر این دستگاه $(0, 0)$ و عضو یکانی آن $(1, 0)$ است. با توجه به تعریف جمع چنین می‌نویسیم

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

به علت آنکه تناظری یک به یک بین مجموعه اعداد حقیقی و زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط با اعضای $(x, 0)$ برقرار است می‌توان بجای $(x, 0)$ عدد x را به کاربرد و با توجه به اینکه $(-1, 0) = (-1, 0) = (0, 1)^2 = i^2 = -1$ و با چنین مفروضاتی به این نتیجه می‌رسیم که عدد مختلط (x, y) با $x + iy$ برابر است،

$$(x, y) = x + iy \quad ; \quad i = (0, 1)$$

صفحه‌ای شامل یک دستگاه محورهای متعامد به صورتهای افقی و قائم اختیار کنیم و آنها را به ترتیب محورهای حقیقی و موهومی می‌نامیم. واحد بر محور x "یک" و واحد i را "i" می‌گیریم. صفحه‌ای با چنین محورهای مختصات را یک صفحه مختلط می‌نامیم. هر عدد مختلط $z = x + iy$ نقطه‌ای به طول x و عرض y است.

عدد مختلط $x - iy$ را مختلط مزدوج $z = x + iy$ نامیده و به \bar{z} نمایش می‌دهند. تقسیم در اعداد مختلط نیز بامعنی است. در واقع به ازای دو عدد مختلط z_1 و z_2 داریم

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

که عددی مختلط است.

هرگاه قرار دهیم

$$y = r \sin \theta \quad \text{و} \quad x = r \cos \theta$$

آنگاه داریم

$$z = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

r را قدر مطلق عدد مختلط z نامیده و به $|z|$ نمایش می دهند، $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، زاویه θ که زاویه بین oz و ox است به آرگومان یا شناسه z موسوم است و داریم

$$\theta = \arg z = \arctan \frac{y}{x}$$

و $-\pi < \theta \leq \pi$ را آرگومان اصلی می نامند، برطبق تعریفی از اوپلر می نویسند $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ این تساوی به فرمول اوپلر نیز موسوم است. با توجه به این فرمول می یابیم

$$z = r e^{i\theta}$$

$e^{i\theta}$ متناوب با دوره $2k\pi i$ است. به سادگی می توان ثابت کرد.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||, \quad |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (\text{فرمول موآور})$$

از روی فرمول موآور $\cos nx$ و $\sin nx$ را می توان برحسب توانهایی از $\cos x$ و $\sin x$ محاسبه نمود. ریشه گیری از اعداد مختلط نیز به سادگی صورت می پذیرد و به کمک ریشه گیری می توان به حل معادلات پرداخت برای این منظور فرض کنید $z = r e^{i\theta}$ عددی مفروض باشد آنگاه، $w = p e^{i\phi}$ را می خواهیم طوری بیابیم که $w^n = z$ که آن را به صورت $w = z^{\frac{1}{n}}$ نیز می نویسیم از $w^n = z$ می یابیم

$$\rho^n e^{in\phi} = r e^{i\theta}$$

و از آنجا $\rho^n = r$

$$\phi = \frac{\theta + \gamma k\pi}{n}, \quad n\phi = \theta + \gamma k\pi$$

بنابراین ریشه n ام z اعداد مختلط

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + \gamma k\pi}{n}\right)} \quad \text{و} \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

است که تنها n ریشه آن غیر تکراری است. بنابراین $w = z^{1/n}$ دارای n ریشه به صورت زیر است

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + \gamma k\pi}{n}\right)}; \quad k = 0, \pm 1, \dots, n-1$$

به عنوان مثال و با استفاده از ریشه یابی اعداد مختلط جوابهای معادله $x^2 + 16 = 0$ را بیابید.
داریم

$$x^2 = -16 = 16e^{i\pi} = 16e^{i(\pi + \gamma k\pi)}$$

و از آنجا

$$x_k = 4e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma k\pi}{2}\right)}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

در نتیجه

$$x_0 = 4e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}(-1+i), \quad x_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}(1+i)$$

$$x_2 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{2}(1-i), \quad x_3 = 4e^{i\frac{5\pi}{2}} = \sqrt{2}(-1-i)$$

۲.۳. تمرینات

۱. نشان دهید که

a) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

b) $\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|,$

$$c) \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| \leq \frac{|z_1|}{||z_1| - |z_2||}$$

$$d) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

۲. مقدار هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$a) \sqrt{-i} \quad b) \sqrt{1-i\sqrt{3}} \quad c) \sqrt[3]{-1} \quad d) \sqrt[3]{1+i}$$

۳. نشان دهید که

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

و با توجه به آن ثابت کنید که

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+1/2)\theta]}{2\sin(\theta/2)} ; \quad 0 < \theta < 2\pi$$

۴. نشان دهید که اگر z یکی از ریشه‌های n ام واحد بوده و $z \neq 1$ آنگاه

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$$

۳.۳. نواحی در صفحه مختلط

ε همسایگی نقطه z مجموعه نقاطی از صفحه مختلط است که در نامساوی $|z - z_0| < \varepsilon$ صدق کند.

$$N_\varepsilon(z_0) = \{z \mid z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \varepsilon\}$$

فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از صفحه مختلط باشد. نقطه $z_0 \in D$ را یک نقطه داخلی D نامند هرگاه همسایگی‌ای از z_0 ، $N_\varepsilon(z_0)$ ، موجود باشد به طوری که $N_\varepsilon(z_0) \subset D$ نقطه z_0 یک نقطه خارجی D نامند هرگاه $N_\varepsilon(z_0)$ ‌ای موجود باشد که

$$N_\varepsilon(z_0) \cap D = \emptyset$$

نقطه z_0 را یک نقطه کرانه‌ای D نامند هرگاه به ازای هر همسایگی $N_\varepsilon(z_0)$

$$N_\varepsilon(z_0) \cap (\mathbb{C} - D) \neq \emptyset \quad \text{و} \quad N_\varepsilon(z_0) \cap D \neq \emptyset$$

مجموعه D را یک مجموعه باز نامند هرگاه تمام نقاط آن نقاط داخلی باشند. یک مجموعه را بسته نامند هرگاه شامل نقاط مرزی خود باشد. مجموعه D را ساده نامند هرگاه منحنی مرز آن خود را قطع نکند. مجموعه D را همبند نامند هرگاه بتوان هر دو نقطه از آن را با یک خط شکسته طوری بهم وصل نمود که کلیه نقاط این خط شکسته واقع در D باشد.

۴.۳. توابع مختلط

فرض کنید D یک مجموعه باز و هم بند ساده باشد و به ازای هر $z \in D$ عدد مختلط $w = u + iv$ منتسب گردد آنگاه w را تابعی از z نامند هرگاه به ازای هر z دو w مختلف وجود نداشته باشد.

بحث آینده ما در توابع مختلط اختصاص به آن دسته از بستگی های بین w و z دارد که بتوان آنها را با یک ضابطه $w = f(z)$ بیان نمود. ما در بحث خود ضابطه $w = f(z)$ را تابع و مجموعه باز و همبند ساده D را حوزه تعریف f یا به طور ساده تر حوزه f می نامیم. در بحث مربوط به توابع حقیقی مشاهده کردیم که نمودار هر تابع را می توان به صورت یک منحنی یا یک سطح نمایش داد. در توابع مختلط چنین نمایش نموداری مقدور نیست. تابع $w = f(z)$ در واقع هر نقطه z از ناحیه D واقع در صفحه x و y را به یک نقطه w واقع در ناحیه D' از صفحه u و v تبدیل می کند مثلاً هرگاه $w = z^2$ آنگاه هر نقطه $z = x + iy$ از ناحیه D به یک نقطه $w = u + iv$ با $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ در صفحه w تبدیل می شود. مثلاً با توجه به این تابع نقطه $1 + i$ از صفحه z به نقطه $2i$ در صفحه w تبدیل می شود. بدین جهت وقتی که از تابع $w = f(z)$ در تبدیل ناحیه ای از صفحه z به داخل ناحیه ای در صفحه w صحبت می شود در آن صورت به تابع $w = f(z)$ یک نگاهت یا یک تبدیل می گویند. $w = f(z)$ را نقش نقطه z با تبدیل $w = f(z)$ می نامند. نگاهتی که زاویه را چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت بدون تغییر منتقل کند به نگاهت هممدیس موسوم است و جای خاصی در مسائل کاربردی دارد و مبحث نسبتاً بزرگی از این مجموعه را به خود اختصاص می دهد. در بحثهای آینده ضمن یادآوری مطالبی

که در توابع حقیقی ارائه شده‌اند بیشتر توجه خود را به مفاهیمی از توابع مختلط معطوف می‌داریم که نظیر آنها در توابع حقیقی موجود نیست. در هر صورت در اینجا بجاست که به بحث در مورد حد و پیوستگی توابع مختلط و سپس به تعریف مشتق و قضایای مربوط به آنها بپردازیم.

تابع $w=f(z)$ در نقطه z_0 دارای حد w_0 است یعنی $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

تابع $f(z)$ را در نقطه z_0 پیوسته نامند هرگاه این تابع در z_0 دارای حدی برابر مقدار تابع در این نقطه باشد یعنی

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

هرگاه $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 دارای حد باشند آنگاه به سادگی می‌توان ثابت کرد

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z))}{(\lim_{z \rightarrow z_0} g(z))}$$

مشروط به اینکه

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$$

تابع $w=f(z)$ در نقطه z دارای مشتق است هرگاه عبارت $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ وقتی که $\Delta z \rightarrow 0$ دارای حد باشد. حد این مقدار را مشتق تابع $f(z)$ نامیده و به $f'(z)$ نمایش می دهند.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

مثلاً با توجه به این تعریف به سادگی می توان ثابت کرد که تابع $f(z)=z^2$ در نقطه z دارای مشتق $2z$ و مشتق $w=z^2$ برابر $w'=2z^{2-1}$ است و همینطور تابع پیوسته $w=\bar{z}$ در هیچ نقطه دارای مشتق نیست.

تابع $w=f(z)$ را در نقطه z تحلیلی نامند هرگاه یک همسایگی از z موجود باشد که این تابع در تمام نقاط این همسایگی دارای مشتق باشد.

تابع $w=f(z)$ را یک تابع تام نامند هرگاه در کلیه نقاط صفحه z تحلیلی باشد. مثلاً تابع $w=z^2$ و یا هر تابع به صورت یک چند جمله ای تابعی تام است.
در ارتباط با مشتق دو قضیه بسیار جالب زیر را داریم :

قضیه ۱ (قضیه اول کشی ریمن). هرگاه تابع $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=x+iy$ دارای مشتق باشد آنگاه

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

همچنین

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

این معادلات به شرایط یا معادلات کشی ریمن موسومند.

اثبات. داریم

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(u+\Delta u) + i(v+\Delta v) - (u+iv)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

ولی به علت وجود حد فوق می توان نوشت

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{1}{i} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta y} =$$

$$\frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

بنابراین

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

و اثبات قضیه به پایان می رسد.

قضیه ۲ (قضیه دوم کشی ریمن). هرگاه u و v در تابع $f(z) = u + iv$ در نقطه $z = x + iy$ در معادلات کشی ریمن صدق کرده و در یک همسایگی از (x, y) پیوسته و با مشتقات جزئی پیوسته باشد آنگاه $f'(z)$ موجود و برابر است با

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

اثبات. با تشکیل عبارت مشتق می یابیم

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

در بحث مربوط به توابع دو متغیری آموختیم که

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \varepsilon_1 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \varepsilon_r \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

که در آن $\varepsilon_r, \varepsilon_1 \rightarrow 0$ وقتی که $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$

با استفاده از تساویهای معادلات کشی ریمان نتیجه می‌گیریم

$$\Delta u = u_x \Delta x - v_y \Delta y + \varepsilon_1 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + u_x \Delta y + \varepsilon_r \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

با جایگزینی این عبارات در عبارت مشتق می‌یابیم

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x + i v_x + (\varepsilon_1 + i \varepsilon_r) \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + i \Delta y}$$

حال چنانچه $\Delta z \rightarrow 0$ آنگاه $\Delta x \rightarrow 0$ و $\Delta y \rightarrow 0$ و از آنجا عبارت

$$\left| (\varepsilon_1 + i \varepsilon_r) \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x + i \Delta y} \right| = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_r^2}$$

به سمت صفر میل خواهد کرد. بنابراین می‌یابیم

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = u_x + i v_x$$

و اثبات به پایان می‌رسد

هرگاه تغییر متغیر $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ دهیم آنگاه معادلات کشی ریمان در مختصات

قطبی به صورت زیر در می‌آیند.

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad \text{و} \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

و مشتق تابع در صورت وجود برابر است با

$$f'(z) = (u_r + i v_r) e^{-i\theta}$$

(ثابت کنید).

مثال ۱. مشتق تابع $f(z) = z^2$ را در صورت وجود بیابید.

داریم

$$f(z) = u + iv = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$u_y = -v_x = -2y, \quad u_x = v_y = 2x \quad \text{و} \quad v = 2xy, \quad u = x^2 - y^2$$

بنابراین u و v و چهار مشتق جزئی آن پیوسته بوده و در معادلات کوشی ریمن صدق می‌کنند، در نتیجه

$$f'(z) = 2z$$

دارای مشتق بوده و داریم

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z$$

مثال ۲. در پیوستگی و مشتقپذیری تابع $f(z) = \bar{z}$ بحث کنید.

بدیهی است که تابع $f(z) = \bar{z} = x - iy$ در همه نقاط پیوسته است ولی با توجه به اینکه $v = -y$,

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = -1$$

$$u_x \neq v_y$$

یعنی این تابع همه جا پیوسته است ولی در هیچ کجا مشتقپذیر نیست.

مثال ۳. مشتق تابع $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ را در صورت وجود بیابید.

داریم

$$v = 0, \quad u = x^2 + y^2$$

بنابراین

$$v_y = 0, \quad v_x = 0, \quad u_y = 2y, \quad u_x = 2x$$

بنابراین $f(z)$ تنها در نقطه $(0, 0)$ دارای مشتق است و مشتق آن در این نقطه برابر صفر است.

مثال ۴. مشتق تابع $f(z) = (Rez)^2 + i(Imz)^2 = x^2 + iy^2$ را در صورت وجود بیابید.

داریم

$$u_x = 2x, \quad v_y = 2y \quad \text{و} \quad v = y^2, \quad u = x^2$$

u و v تنها وقتی در معادلات کشی ریمن صدق می‌کنند که $y=x$ یعنی تابع پیوسته

$f(z) = x^2 + iy^2$ تنها روی خط $y=x$ دارای مشتق است و مشتق آن در نقطه (x, x) برابر است با

$$f'(x+ix) = 2x$$

۵.۳. توابع همساز

تابع پیوسته $u(x, y)$ را تابع همساز نامند هرگاه دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته

بوده و در معادله لاپلاس صدق کند. هرگاه $f(z) = u + iv$ تابعی تحلیلی در نقطه z باشد آنگاه u

و v توابعی همساز هستند. در واقع با مشتقگیری از $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ به ترتیب نسبت به x و y

و جمع کردن نتایج حاصل می‌یابیم $u_{xx} + u_{yy} = 0$ و همینطور $v_{xx} + v_{yy} = 0$

را مزدوج همساز تابع همساز u نامند هرگاه $f(z) = u + iv$ تابعی تحلیلی باشد، چنانچه u

در دست باشد آنگاه با توجه به معادلات کشی ریمن به سادگی می‌توان v مزدوج همساز u ،

را مشخص نمود. مثلاً هرگاه $u = x^2 - y^2$ آنگاه $u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$ حال v را طوری می‌یابیم که

$$v_x = -u_y = 2y$$

و با انتگرالگیری از آن داریم

$$v = 2xy + h(y)$$

با توجه به $v_y = u_x = 2x$ و $v_y = 2x + h'(y)$ می‌یابیم.

$$2x + h'(y) = 2x$$

و در نتیجه $h'(y) = 0$ که ما $h(y)$ را نیز برابر صفر اختیار کرده می‌یابیم

$$v(x, y) = 2xy$$

و از آنجا

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy = z^2$$

که تابعی تحلیلی است.

۶.۳. مسائل حل شده

۱. با توجه به تعریف مشتق نشان دهید که تابع $f(z) = |z|^2$ تنها در $z=0$ دارای مشتق است. با

تشکیل عبارت مشتق در $z \neq 0$ می یابیم.

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - x^2 - y^2}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$\frac{2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2y\Delta y + (\Delta y)^2}{i\Delta y} = -2iy$$

دو حد فوق به ازای $z \neq 0$ با هم برابر نیستند.

هم اکنون با تشکیل عبارت مشتق در $z=0$ می یابیم.

$$\frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = \frac{(\Delta z)(\overline{\Delta z})}{\Delta z} = \overline{\Delta z}$$

۲. مشتق تابع $f(z) = (1+i)(x+y)^2$ را در صورت وجود بیابید. آیا این تابع جایی در صفحه

مختلط تحلیلی است؟

هرگاه بنویسیم $f(z) = u + iv$ آنگاه داریم $u = (x+y)^2$ و $v = (x+y)^2$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2(x+y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

ولی $\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$ زیرا

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2(x+y)$$

مگر آنکه $2(x+y) = -2(x+y)$ و از آنجا $y = -x$ یعنی تابع تنها روی خط

است و جایی هم تحلیلی نیست. مشتق تابع بر روی خط $y=-x$ عبارت است از

$$f'(x-ix) = 2(1+i)(x+y) \Big|_{y=-x} = 0$$

۳. نشان دهید که تابع $f(z) = \sqrt{xy}$ در نقطه $z=0$ در معادله کشی ریمن صدق می‌کند ولی در این نقطه دارای مشتق نیست.

داریم $u = \sqrt{xy}$ و $v = 0$ در نقطه $z=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

همینطور $\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = 0$ و در نتیجه $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ همچنین می‌توان ثابت کرد که شرط دیگر

کشی ریمن نیز در مبداء مختصات برقرار است. ولی این تابع در مبداء مختصات دارای مشتق

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\Delta x + i \Delta y} \quad \text{در واقع نیست.}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x| |\Delta y|}}{\Delta x + i \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x + i \Delta x} \quad \text{از طرفی روی خط } \Delta y = \Delta x \text{ داریم}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x + i \Delta x} = \frac{-1}{1+i}, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x + i \Delta x} = \frac{1}{1+i}$$

بنابراین $f'(0)$ موجود نیست.

۴. هرگاه $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد آنگاه

$$u_x v_x + u_y v_y = 0$$

با توجه به معادلات کشی ریمن $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ می‌یابیم

$$u_x v_x + u_y v_y = 0 \quad \text{یا} \quad -u_x v_x = u_y v_y$$

$$u_x v_x + u_y v_y = 0 \quad \text{یا} \quad -u_x v_x = u_y v_y$$

۵. مشتق تابع $f(z) = \cos x + i(\cos x + \cos y)$ را در نقاطی که دارای مشتق است بیابید.

$$v = \cos x + \cos y, \quad u = \cos x$$

$$u_x = -\sin x, \quad u_y = 0$$

$$v_y = -\sin y, \quad v_x = -\sin x,$$

معادلات کشی ریمن تنها وقتی برقرار است که

$$\sin x = 0 \quad \text{و} \quad \sin y = \sin x$$

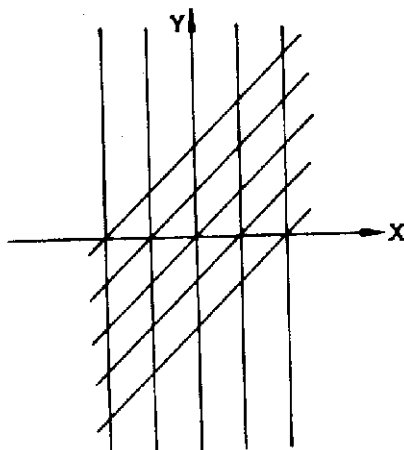
$$x = n\pi \quad \text{و} \quad y - x = k\pi$$

بنابراین تابع فوق تنها در نقاط برخورد خطوط

$$y - x = k\pi; k = 0, \pm 1, \dots, \quad x = n\pi; n = 0, \pm 1, \dots$$

دارای مشتق است و مشتق آن در چنین نقاطی عبارت است از

$$f'[n\pi + i(n+k)\pi] = -\sin n\pi - i \sin n\pi = 0.$$



۷.۳. تمرینات

۱ - با توجه به تعریف مشتق نقاطی را که هریک از توابع زیر دارای مشتق هستند و یا دارای مشتق نیستند مشخص کنید.

a) $f(z) = z|z|^2$ b) $f(z) = \operatorname{Re}z + \operatorname{Im}z$

۲ - نقاطی را که هریک از توابع زیر مشتق پذیر، تحلیلی و یا غیر تحلیلی هستند مشخص کنید.

a) $f(z) = z^2$ b) $f(z) = i|z|^2$

c) $f(z) = \frac{\operatorname{Re}z}{\operatorname{Im}z}$ d) $f(z) = (1+i)(x-y)^2$

e) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ f) $f(z) = \operatorname{Arg}z$

۳ - آیا توابع زیر همساز هستند؟ در صورت همساز بودن، توابع مزدوج همساز آنها را بیابید و تابع تحلیلی متناظر با آنها را به صورت تابعی از z بنویسید.

a) $u = e^x \cos y$ b) $u = (x^2 - y^2)^2$ c) $u = x^2 - 2xy^2$

d) $u = x^2 - y^2 - 2x + 3y$ e) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ f) $u = 2xy$

۴ - a و b را طوری بیابید که هریک از توابع زیر همساز باشند و مزدوج همساز آنها را بیابید.

a) $u = e^{ax} \cos by$ b) $u = \cos ax \cosh by$

۵ - هرگاه D مجموعه همه z هایی باشد که $|z| < 1$ یا $|z-2| < 1$ آنگاه D همبند نیست.

۶ - نقطه z را یک نقطه انباشتگی مجموعه D نامند هرگاه هر همسایگی از z شامل نقطه‌ای از D باشد با توجه به این تعریف نشان دهید که:

الف - هریک از تقاطع یک مجموعه باز و همبند یک نقطه انباشتگی آن است.

ب - یک مجموعه متناهی نمی‌تواند شامل نقطه انباشتگی باشد.

۷- تابع $f(z) = |z|^2$ در تمام صفحه مختلط پیوسته است.

۸- هرگاه تابع $f(z)$ در z_0 پیوسته بوده و $f'(z_0) \neq 0$ آنگاه یک همسایگی از z_0 موجود است که

به ازای هر z از این همسایگی $f'(z) \neq 0$

۹- هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی باشد آنگاه f یک تابع ثابت است اگر

الف - $f(z)$ آرنیز در D تحلیلی باشد.

ب - $|f|$ در D ثابت باشد.

ج - به ازای هر z از D مقدار f حقیقی باشد.

د - $Re f(z)$ عددی ثابت باشد.

۱۰- هرگاه $f(z)$ در D تحلیلی بوده و همواره $f'(z) = 0$ آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است.

۱۱- مشتق هر یک از توابع زیر را در نقاطی که دارای مشتق هستند بیابید و نقاطی را که

تحلیلی هستند مشخص کنید

a) $f(z) = |x| + i|y|$,

b) $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|}$

c) $f(z) = (Re z)^2 - i(Im z)^2$

d) $f(z) = |y| - i|x|$

e) $f(z) = \cos(x+y) + i\cos(x-y)$

f) $f(z) = \cos x + i\cos y$

g) $f(z) = |x-y| + i|y+x|$

h) $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$

۸.۳ برخی توابع مقدماتی، نگاشتهای همدیس

۱. تابع همانی

تابع $f(z) = z$ را یک تابع همانی می نامند. هرگاه دو صفحه z و $w = f(z) = u + iv$ را بر هم منطبق

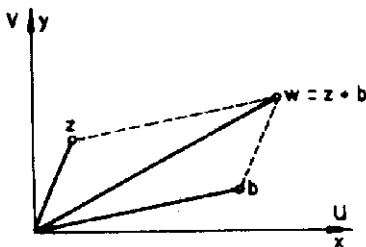
بگیریم آنگاه داریم $u = x$ و $v = y$. بدیهی است که این تابع تابعی تام بوده و هر شکل را بدون

تغییر منتقل می کند. همدیس بودن این تابع نیز امری بدیهی است یعنی هر زاویه با این تبدیل

بدون تغییر منتقل می شود.

۲. تابع $w = z + b$

نظر به اینکه هر عدد مختلط $z = x + iy$ را می توان به صورت یک بردار در صفحه مختلط با نقطه آغازی مبدا مختصات و نقطه انتهائی (x, y) تصور نمود، مجموع دو عدد مختلط را نیز میتوان از قاعده ای شبیه قاعده جمع بردارها به دست آورد.
بنابراین $w = z + b$ که تابعی تام است هر شکل را بدون تغییر به اندازه b منتقل می کند.



۳. توابع خطی

هر تابع به صورت $w = az + b$ که در آن a و b اعداد مختلط ثابتی هستند به یک تابع خطی موسوم است مثلاً $w = iz + 1 + i = -y + 1 + i(x + 1)$ یک تابع خطی است.
هر تابع خطی تابعی تام است. به طریق جبری به کمک این تبدیل هر منحنی از صفحه z را می توان به منحنی ای در صفحه w تبدیل نمود مثلاً هرگاه $y = x^2$ یک سهمی در صفحه z باشد آنگاه با توجه به اینکه $u = -y + 1$ و $v = x + 1$ و با قرار دادن $y = x^2$ می یابیم

$$\begin{cases} u = -x^2 + 1 \\ v = x + 1 \end{cases}$$

با حذف x بین این دو معادله به معادله $u - 1 = -(v - 1)^2$ می رسیم

تبدیل منحنی ها یا نواحی از یک صفحه به صفحه دیگر به روشهای هندسی نیز بسیار جالب است. مثلاً هرگاه تابع $w = az$ را در نظر بگیریم و بنویسیم:

$$w = \rho e^{i\phi}, \quad z = r e^{i\theta}, \quad a = r_0 e^{i\theta_0}$$

آنگاه می‌یابیم

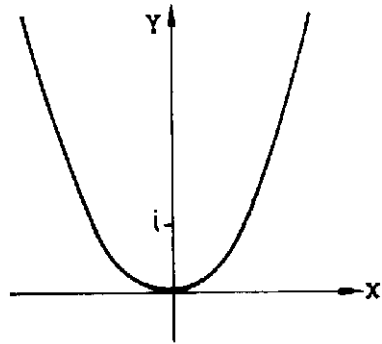
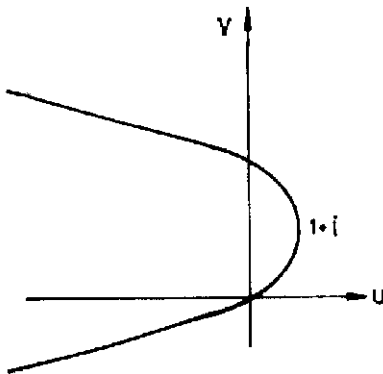
$$w = \rho e^{i\phi} = \pi \cdot e^{i(\theta + \theta_0)}$$



POWEREN.IR

واز آنجا

$$\phi = \theta + \theta_0 \quad \text{و} \quad \rho = \pi.$$



یعنی برای رسیدن از z به w در تبدیل $w = az + b$ به کمک یک تبدیل خطی نخست انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$ و دورانی به اندازه $arg a$ و سپس انتقالی به اندازه b لازم است و چون انبساط، انقباض، دوران و انتقال زاویه را عوض نمی‌کند، پس تبدیل خطی تبدیلی همدیس است. قبل از بحث بیشتر در مورد شناخت توابع نیاز به قضیه‌ای در مورد همدیس بودن توابع داریم. این قضیه در ذیل ارائه می‌گردد.

قضیه ۳. هرگاه $w = f(z) = u + iv$ در نقطه z تحلیلی بوده و $f'(z) \neq 0$ آنگاه $w = f(z)$ در z تابعی همدیس است یعنی هر زاویه با راس z را بدون آنکه اندازه یا جهت آن را عوض کند به صفحه w منتقل می‌کند.

اثبات: هرگاه منحنی c با نمایش $z(t) = x(t) + iy(t); \alpha \leq t \leq \beta$ باشد آنگاه

$$w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)); \alpha \leq t \leq \beta$$

نمایش پارامتری w' نقش منحنی w در صفحه uv است. خط مماس بر منحنی C به معادله $w'(t) = f'(z(t))z'(t)$ است و حال آنکه خط مماس بر C' به معادله $w'(t) = f'(z(t))z'(t)$ خواهد بود. با توجه به این تساوی داریم

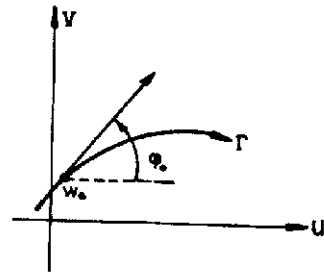
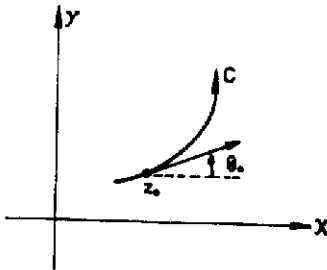
$$\arg w'(t) = \arg f'(z(t)) + \arg z'(t)$$

هرگاه ϕ و θ به ترتیب ضریب زاویه خط مماس بر منحنیهای C' و C بوده و $\psi = \arg f'(z)$ آنگاه

$$\theta = \phi - \psi$$

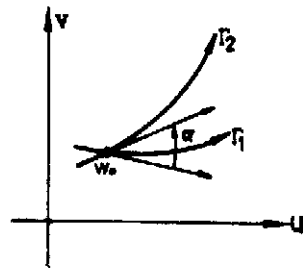
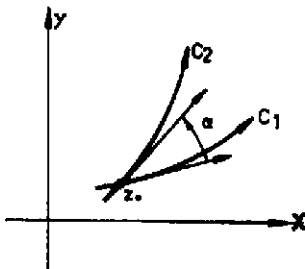
یا

$$\phi = \psi + \theta$$



حال اگر θ زاویه بین دو منحنی C_1 و C_2 واقع در صفحه xy و ϕ زاویه بین دو منحنی Γ_1 و Γ_2 نقش منحنیهای C_1 و C_2 در صفحه uv باشد آنگاه با توجه به نتیجه فوق داریم

$$\theta_0 = \theta_2 - \theta_1 = (\phi_2 - \psi) - (\phi_1 - \psi) = \phi_2 - \phi_1 = \phi.$$

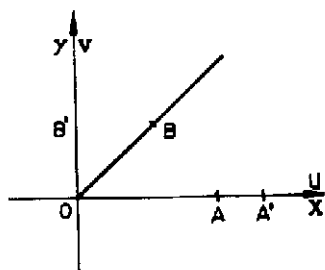


و اثبات حکم به پایان می‌رسد.

حال مجدداً به بررسی توابع برمی‌گردیم و به شناخت توابع جدید می‌پردازیم.

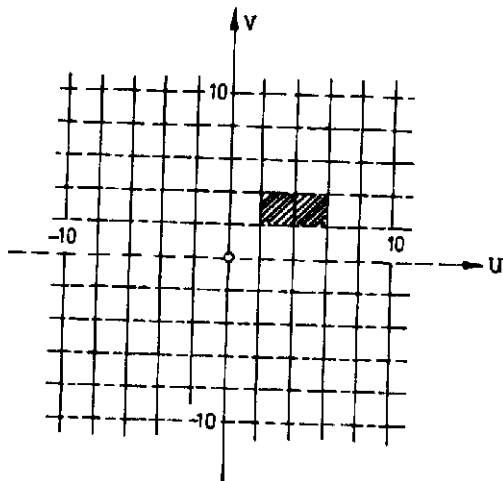
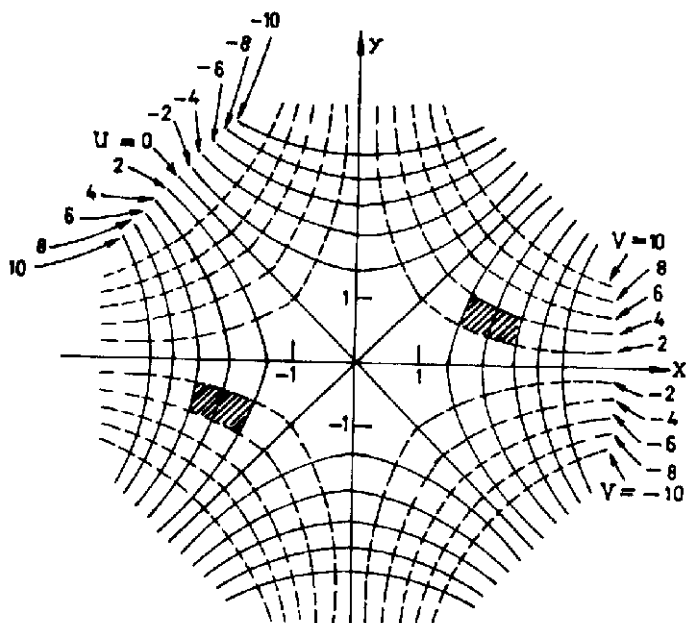
۴. تابع $w=z^2$

تابع $w=z^2=x^2-y^2+i2xy$ در همه جا تحلیلی است و در هر نقطه به جز نقطه $z=0$ که مشتق آن صفر است تابعی همدیس است. با نوشتن $z=re^{i\theta}$ و $w=pe^{i\phi}$ می‌یابیم $\rho=r^2$ و $\phi=2\theta$ یعنی در این نگاشت یک انبساط یا انقباض به اندازه r و یک دوران به اندازه θ خواهیم داشت و به سادگی می‌توان تحقیق نمود که زاویه $\angle AOB=45^\circ$ در شکل زیر به زاویه $\angle A'OB'=90^\circ$ در صفحه uv تبدیل می‌شود.



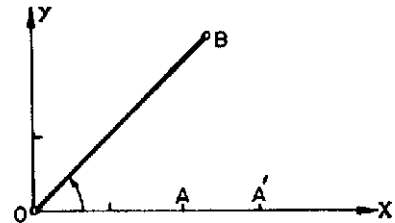
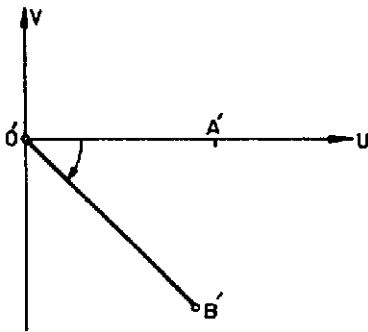
یعنی $w=z^2$ در مبدا مختصات همدیس نیست. نقاط $z=1$ و $z=0$ با این نگاشت بدون تغییر می‌ماند یا به عبارت دیگر w این نقاط را به خودشان بدل می‌کند بدین جهت این نقاط نقاط ثابت تبدیل هستند.

در حالت کلی نقاط ثابت تبدیل $w=f(z)$ از حل معادله $f(z)=z$ به دست می‌آیند. دو هذلولی متعامد $x^2-y^2=1$ و $y=\frac{1}{x}$ به دو خط راست متعامد $u=1$ و $v=2$ تبدیل می‌شوند.



۵. تابع $w = \frac{1}{z}$

این تابع در همه نقاط بجز نقطه $z=0$ تحلیلی است و هر زاویه به رأس مبدا مختصات را هم اندازه خود منتقل می کند ولی جهت آنرا تغییر می دهد. چنین تغییری در نمودارهای زیر نشان داده شده است.

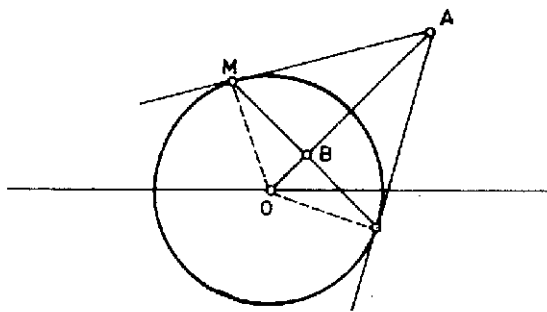


با $\rho = \frac{1}{r}$ یا $w = \rho e^{i\phi}$ و $z = re^{i\theta}$ هرگاه قرار دهیم $z = \pm 1$ نقاط ثابت این تبدیل هستند. هرگاه قرار دهیم $pr = 1$ و $\phi = -\theta$ برای رسیدن از z به w می توان از انعکاسهای دایره ای و آینه ای استفاده نمود. یادآوری می کنیم که به ازای هر دایره مفروضی به مرکز O نقطه B واقع بر OA را منعکس نقطه A نسبت به دایره ای به مرکز O و شعاع R نامند هرگاه $OA \times OB = R^2$ که در آن شعاع دایره است. در تبدیل فوق هرگاه فرض کنیم z منعکس z_1 نسبت به دایره مثلثاتی است یعنی $|z| |z_1| = rp = 1$ آنگاه w منعکس z_1 نسبت به خط افق نقش نقطه z در صفحه w با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ خواهد بود، بنابراین نقش z در صفحه با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ بعد از یک انعکاس دایره ای نسبت به دایره واحد و یک انعکاس آینه ای نسبت به خط افق به دست می آید. این نگاشت خارج دایره واحد را به داخل دایره واحد و نیم دایره فوقانی واحد را به نیم دایره تحتانی تبدیل می کند. تبدیل $w = \frac{1}{z}$ هر دایره را به یک دایره یا به خط راست و بالعکس تبدیل می کند. معادله کلی یک دایره یا یک خط راست در صفحه z به صورت

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0.$$

است. با توجه به $w = \frac{1}{z}$ می توان نوشت $z = \frac{1}{w}$ و از آنجا

$$z = \frac{1}{u+iv} = \frac{u-iv}{u^2+v^2}$$



و در نتیجه

$$y = -\frac{v}{u^2+v^2} \quad \text{و} \quad x = \frac{u}{u^2+v^2}$$

با جایگزین کردن این عبارات در معادله فوق می‌یابیم

$$a \left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} \right) + \frac{bu}{u^2+v^2} - \frac{cv}{u^2+v^2} + d = 0$$

و یا

$$a + bu - cv + d(u^2+v^2) = 0$$

بنابراین تبدیل $w = \frac{1}{z}$

الف. به ازای $a \neq 0$ و $d \neq 0$ هر دایره غیر مار بر مبداء مختصات را به یک دایره غیر مار بر مبداء مختصات تبدیل می‌کند.

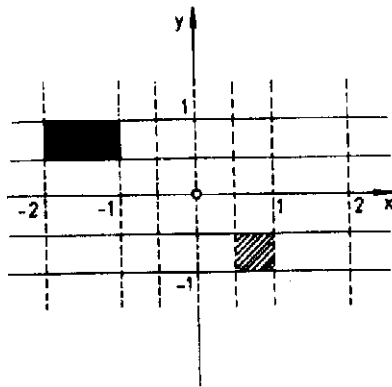
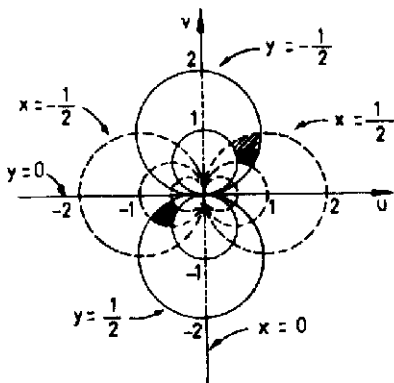
ب. به ازای $a \neq 0$ و $d = 0$ هر دایره مار بر مبداء به یک خط راست غیر مار بر مبداء تبدیل می‌کند.

ج. به ازای $a = 0$ و $d \neq 0$ هر خط راست غیر مار بر مبداء را به دایره مار بر مبداء تبدیل می‌کند. هر دایره مار بر مبداء را به یک خط راست مار بر مبداء تبدیل می‌کند.

می‌کند. با این تبدیل خطوط متعامد $x=1$ و $y=1$ به دوائر متعامد

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$

تبدیل می‌شوند.



۶. تبدیل دو خطی یا تبدیل خطی کسری یا تبدیل مویوس

هرنگاشت به صورت $w = \frac{az+b}{cz+d}$ که در آن $ad-bc \neq 0$ به تبدیل دو خطی، خطی کسری یا تبدیل مویوس موسوم است. این تبدیل را می توان از ترکیب سایر تبدیلات به دست آورد. در واقع

$$w = \frac{a}{c} \frac{z+b/a}{z+d/c} = \frac{a}{c} \left(\frac{z+d/c + b/a - d/c}{z+d/c} \right) = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{b/a - c/d}{z+d/c} \right)$$

که آن را می توان به صورت

$$w = A + \frac{B}{z+C}$$

خلاصه کرد. بنابراین بعد از یک انتقال z به اندازه C و یک انعکاس دایره ای نسبت به دایره یکه و یک انعکاس آینه ای نسبت به خط افق تبدیل مویوس به یک تبدیل خطی تبدیل می شود. از روی تبدیل $w = \frac{az+b}{cz+d}$ می توان نتیجه گرفت $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ یعنی تناظرین صفحات w و z با این نگاشت یک به یک است. نقش نقطه $z = -\frac{d}{c}$ از صفحه z نقطه بی نهایت صفحه w

و نقطه $\frac{a}{c}$ از صفحه w نقش نقطه بی نهایت صفحه z است. این تبدیل در همه نقاط به جز $z = -\frac{d}{c}$ همدیس است زیرا $w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ مشتق آن در همه نقاط به جز در $z = -\frac{d}{c}$ موجود است.

این تبدیل دارای خاصیت جالبی است و آن خاصیت این است که تنها یک چنین تبدیلی موجود است که سه نقطه z_1 و z_2 و z_3 از صفحه z را به ترتیب به روی سه نقطه w_1 و w_2 و w_3 از صفحه w می‌نگارد و این تبدیل را می‌توان از روی تساوی زیر به دست آورد.

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

مثلاً تبدیل $w = \frac{iz+3}{z-4}$ نقاط ۱ و ۰ و -1 را به ترتیب به روی نقاط $\frac{i}{3} - 1$ ، $-\frac{3}{4}$ و $\frac{-3+i}{5}$ می‌نگارد. همچنین تبدیل $w = \frac{z+1}{z-1}$ نقاط ۱ و ۰ و -1 را به ترتیب به روی نقاط ∞ و -1 و ۰ می‌نگارد.

۷. تبدیلات خطی کسری خاص

می‌خواهیم تبدیل خطی کسری‌ای بیابیم که نیم صفحه فوقانی $\Im z \geq 0$ را به روی قرص $|w| \leq 1$ بنگارد. نظریه اینکه یک تبدیل خطی کسری خط راست را به دایره و یا خط راست بدل می‌کند و ما می‌خواهیم که ناحیه $\Im z \geq 0$ به قرصی بدل شود بنابراین در این تبدیل خط راست $\Im z = 0$ به دایره تبدیل شود و این دایره باید دایره $|w| = 1$ باشد. چون اگر چنین تبدیلی خط $\Im z = 0$ را به دایره‌ای واقع در داخل قرص $|w| < 1$ تبدیل کند آنگاه با توجه به پیوستگی یک تبدیل خطی کسری نقش نقاط نزدیک به خط $\Im z = 0$ واقع در نیم صفحه تحتانی صفحه z می‌بایست در داخل قرص واقع شوند از طرفی چنین نقاطی می‌بایست نقش نقاطی از نیم صفحه فوقانی باشند و این موضوع با یک به یک بودن تابع خطی کسری متناقض است. بنابراین چنین تبدیلی خطی کسری باید خط $\Im z = 0$ را به دایره $|w| = 1$ تبدیل کند. حال یک تبدیل خطی به صورت $w = \frac{az+b}{cz+d}$ را در نظر می‌گیریم و این تبدیل را طوری معین می‌کنیم که علاوه بر خاصیت فوق سه نقطه $z = 0$ و $z = 1$ و $z = \infty$ را به روی نقاطی واقع بر دایره‌ای که بنگارد نظر به اینکه نقش نقاط $z = 0$ و $z = \infty$ بر دایره $|w| = 1$ واقع است می‌باییم $|d| = |b|$

و $|c| = |a|$ از طرفی با توجه به $ad - bc \neq 0$ می یابیم $a \neq 0$ و $c \neq 0$ با توجه به اینکه $|\frac{a}{c}| = 1$

و با استفاده از $w = \frac{a}{c} \frac{a+b/a}{z+d/c}$ و با فرض

$$\frac{d}{c} = -z_1 \quad \text{و} \quad \frac{b}{a} = -z_1 \quad \text{و} \quad \frac{a}{c} = e^{i\alpha}$$

می یابیم

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1}$$

نظر به اینکه $|\frac{d}{c}| = |\frac{b}{a}|$ می یابیم $|z_1| = |z_1|$ چون نقش نقطه $z=1$ بر

دایره یکه واقع است داریم

$$|1 - z_1| = |1 - z_1|$$

و یا

$$(1 - z_1)(1 - \bar{z}_1) = (1 - z_1)(1 - \bar{z}_1)$$

با توجه به $|z_1| = |z_1|$ و یا $z_1 \bar{z}_1 = z_1 \bar{z}_1$ می یابیم $z_1 + \bar{z}_1 = z_1 + \bar{z}_1$ بنابراین $Re z_1 = Re z_1$

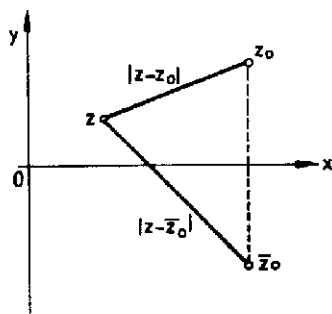
و از $|z_1| = |z_1|$ داریم $z_1 = z_1$ یا $z_1 = z_1$ ولی $z_1 = z_1$ به تبدیل ثابت و غیر همدیس

$w = e^{i\alpha}$ تبدیل می شود. بنابراین تبدیل مورد نظر باید تبدیل $w = e^{i\alpha} \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1}$ باشد. حال اگر z را

در نیم صفحه فوقانی بگیریم آنگاه $|z - \bar{z}_1| < |z - z_1|$ و در نتیجه با چنین انتخابی هر

تبدیلی به صورت فوق با هر انتخاب α و با هر انتخاب z_1 از نیم صفحه فوقانی $\alpha > 0$ را به

روی قرص $|w| \leq 1$ می نگارد.



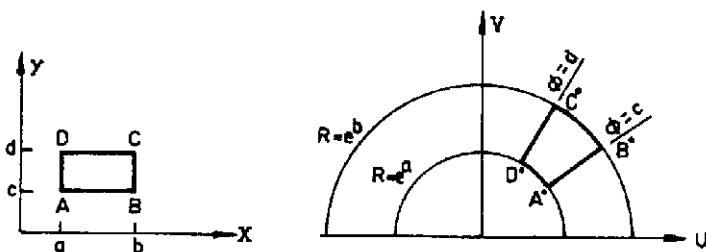
به عنوان مثالی دیگر می توان ناحیه $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ را به روی قرص $|w|=1$ نگاشت. برای این منظور کافی است نخست با تبدیل $w_1 = z^3$ ناحیه مزبور را به روی ناحیه $0 \leq \phi \leq \pi$ نگاشت و سپس از تبدیل فوق استفاده نمود و چنین تبدیلی می تواند یکی از تبدیلات زیر باشد.

$$w = e^{i\alpha} \frac{z^3 - z_0}{z^3 - \bar{z}_0}, \quad \text{Im}(z_0) > 0.$$

۸ نگاشت $w = e^z$

تابع $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ را چنین تعریف می کنیم $w = e^x e^{iy}$ و با توجه به فرمول اولر می یابیم $w = e^x (\cos y + i \sin y)$ بدیهی است که $u = e^x \cos y$ و $v = e^x \sin y$ در معادلات کشی ریمن صدق می کنند. بنابراین تابع $w = e^z$ تابعی تام بوده و مشتق آن با خود تابع برابر است یعنی $w' = e^z$ این تابع همه جا همدیس است زیرا همواره داریم $e^z \neq 0$ نظر به اینکه $e^{z+ik\pi} = e^z$ بنابراین تابع $w = e^z$ تابعی متناوب با دوره $2k\pi i$ است. و هرگاه فرض کنیم $-\pi < \text{Im} z \leq \pi$ آنگاه تناظری یک به یک بین نقاط این ناحیه و صفحه w برقرار است. هرگاه بنویسیم $w = \rho e^{i\phi} = e^x e^{iy}$ آنگاه $\rho = e^x$ و $\phi = y$ یعنی خط $-\pi < y \leq \pi$; $x = c$ به دایره $\rho = e^c$ و خط $y = d$ به خط شعاعی $\phi = d$ تبدیل می شود.

ناحیه $1 < x < 2$ و $\frac{\pi}{6} < y < \frac{\pi}{3}$ به ناحیه $e < \rho < e^2$ و $\frac{\pi}{6} < \phi < \frac{\pi}{3}$ و ناحیه $x \leq 0$ به ناحیه $0 \leq \rho \leq 1$ و ناحیه $x \geq 0$ به ناحیه $\rho \geq 1$ تبدیل می شود.



۹. نگاهت $w = \sin z$

تابع $w = \sin z = \sin(x + iy)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$w = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

می‌توان ثابت کرد که

$$\sin iy = i \sinh y, \quad \cos iy = \cosh y$$

و در نتیجه

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

توابع

$$v = \cos x \sinh y, \quad u = \sin x \cosh y$$

در معادلات کشی ریمن صدق می‌کنند. بنابراین این تبدیل همه جا تحلیلی است و نظر به

اینکه

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

داریم

$$(\sin z)' = \cos z$$

بسیاری از خواص توابع حقیقی تابع سینوسی در توابع مختلط برقرار است مثلاً می‌توان

ثابت نمود.

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2; \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

و

همینطور معادله $\sin z = 0$ دارای جواب $z = k\pi$ است. در هر صورت این موضوع کلیت ندارد

مثلاً معادله $\sin z = 5$ نیز دارای جواب است زیرا

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 5$$

نتیجه می‌دهد

$$\sinhy = 0 \quad \text{ولی} \quad \cosx \sinhy = 0, \quad \sinx \coshy = 0$$

منجر به $y=0$ و از آنجا $\sinx=0$ می شود که غیر ممکن است. بنابراین فرض می کنیم $\cosx=0$ که دارای جواب $x=2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ولی جواب $x=2k\pi - \frac{\pi}{2}$ منجر به $\coshy=0$ می شود که غیر ممکن است ولی از $x=2k\pi + \frac{\pi}{2}$ نتیجه می شود $e^y - 1 + e^y = 0$ که دارای جواب $y = \text{Ln}(0 \pm 2\sqrt{6})$ می باشد بنابراین معادله $\sinz=0$ دارای جواب

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + i \text{Ln}(0 \pm 2\sqrt{6})$$

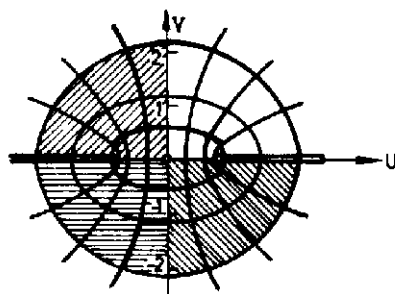
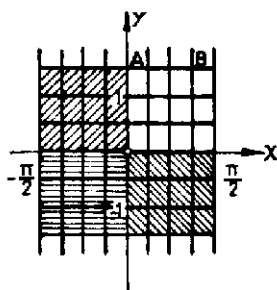
است. نظر به اینکه $\sin(z + 2k\pi) = \sinz$ تناظری یک به یک بین ناحیه $-\pi < x < \pi$ و صفحه z برقرار است این تبدیل در نقاط $z = \pm \frac{\pi}{2}$ هم‌مدیس نیست زیرا مشتق آن $(\sinz)' = \cosz$ در این نقاط صفر است. خط $0 < x = c < \frac{\pi}{2}$ به $u = \text{sinc} \coshy$ و $v = \text{cosc} \sinhy$ و یا به هذلولی

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$

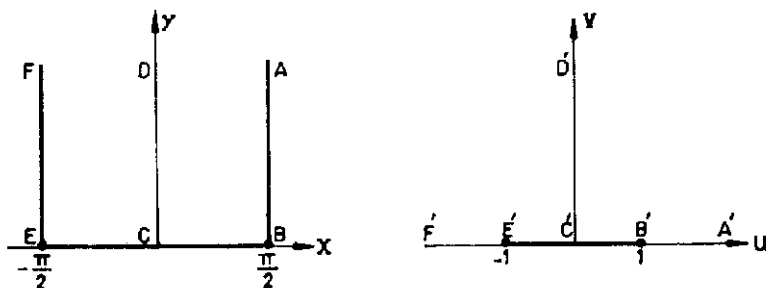
و خط $0 < y = d >$ به $u = \text{sinx} \text{cosh}d$ و $v = \text{cosx} \text{sinh}d$ و یا به بیضی

$$\frac{u^2}{\cosh^2 d} + \frac{v^2}{\sinh^2 d} = 1$$

تبدیل می شود.



نقطه A' به A و نقطه B متناظر با $\frac{\pi}{4} < x = c' < \pi$ به نقطه ای در ربع چهارم صفحه w تبدیل می شود. خط $x = \frac{\pi}{4}$ به نیم خط $v = 0$ و $u = \cosh y \geq 1$ ، خط $x = -\frac{\pi}{4}$ به نیم خط $v = 0$ و $u = -\cosh y \leq -1$ و خط $x = 0$ به خط $u = 0$ تبدیل می شود.



چنانچه مشاهده می کنیم تبدیل $w = \sin z$ در نقاط $z = \pm \frac{\pi}{2}$ هم‌مدیس نیست.

۱۰. سایر نگاشت‌ها

بسیاری از تبدیلات را می توان از روی تبدیلات دیگر به دست آورد مثلاً نگاشت $w = \cos z$ را می توان به صورت

$$w = \cos z = \sin\left(z + \frac{1}{4}\pi\right)$$

نوشت یعنی برای یافتن نقش z با نگاشت $\cos z$ اول آن را به اندازه $\frac{1}{4}\pi$ انتقال می دهیم و سپس تبدیل سینوسی را برای آن به کار می گیریم.

همینطور تبدیل $w = \tan z$ را می توان چنین نوشت

$$w = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{(e^{iz} - 1)}{i(e^{iz} + 1)}$$

با فرض $w_1 = e^{iz}$ می توان نوشت

$$w = -i \frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}$$

یعنی نگاشت $\tanh z$ بعد از یک نگاشت نمائی به یک نگاشت مویوس تبدیل می شود.
تبدیلات سینوسی و کسینوسی هذلولی را نیز می توان از روی تبدیلات سینوسی به دست آورد مثلاً $w = \cosh z$ را چنین می نویسند

$$w = \cos iz = \sin \left(iz + \frac{\pi}{2} \right)$$

بنابراین تبدیل $\cosh z$ بعد از یک دوران z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ و انتقالی به اندازه $\frac{\pi}{2}$ و سپس با به کاربردن نگاشت سینوسی بر آن حاصل می شود. همینطور تبدیل $w = \sinh z$ را چنین می نویسیم.

$$w = \sinh z = -i \sin iz$$

از اینرو تبدیل $w = \sinh z$ بعد از دوران z به اندازه $\frac{\pi}{2}$ و انجام تبدیل سینوسی بر آن و سپس دورانی به اندازه $-\frac{\pi}{2}$ به دست می آید.

۱۱. تابع $w = \ln z$

تابع $e^w = z$ را به صورت $w = \ln z$ نیز می نویسند و آن را تابع لگاریتم z می نامند. هرگاه بنویسیم $w = u + iv$ و $z = re^{i\theta}$; $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = r e^{i\theta}$$

و از آنجا $e^u = r$ یا $u = \ln r$ و $v = \theta + 2k\pi$ بنابراین

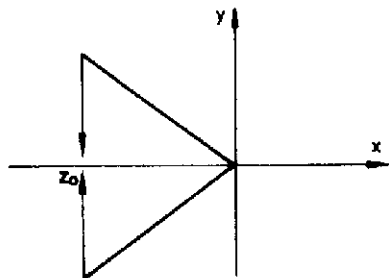
$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi); \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

چنانچه که مشاهده می کنیم لگاریتم یک تابع نیست و بی نهایت مقداری است. ولی به ازای هر k مشخص فرمول فوق بیانگر یک تابع است. تابعی که به ازای یک k مشخص به دست می آید به شاخه k ام لگاریتم موسوم است و شاخه متناظر با $k=0$ را شاخه اصلی لگاریتم می نامند و به $\text{Ln} z$ نمایش می دهند بنابراین

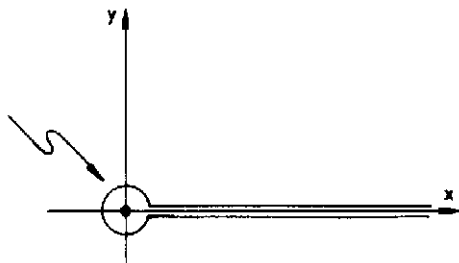
$$Lnz = \ln r + i\theta \quad ; \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

ما بحث در مورد توابع لگاریتمی با شاخه اصلی را ادامه می‌دهیم. بررسی سایر شاخه‌های لگاریتمی همانند شاخه اصلی است. تابع لگاریتمی Lnz بر روی نیم محور حقیقی منفی تابعی غیر پیوسته است زیرا اگر z واقع بر نیم محور حقیقی منفی باشد آنگاه داریم

$$\lim_{z \uparrow z_0} Lnz = \ln |z_0| - i\pi \quad , \quad \lim_{z \downarrow z_0} Lnz = \ln |z_0| + i\pi$$



یعنی Lnz بر روی نیم محور حقیقی منفی تابعی غیر پیوسته بوده و اگر z از بالا یا از پایین به سمت z_0 میل کند دارای دو حد غیر برابر بوده و در این نقطه دارای پرشی به اندازه $2\pi i$ است. در سایر نقاط $u = \ln r$ و $v = \theta$ در معادلات کنشی ریمن صدق کرده و تابع Lnz دارای مشتق $\frac{1}{z}$ است. بنابراین تابع $w = Lnz$ بر روی صفحه مختلط به جز بر نیم محور حقیقی نامشبت تحلیلی است. نیم محور حقیقی منفی را یک خط شاخه‌ای تابع لگاریتم می‌نامند و اگر تصور کنیم صفحه مختلط را در طول نیم محور حقیقی بریده‌ایم آنگاه $w = Lnz$ بر کل چنین صفحه بریده شده‌ای تحلیلی است. هرگاه به جای $-\pi < \theta \leq \pi$ فرض کنیم $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ آنگاه خط شاخه‌ای نیم خط شعاعی $\theta = \alpha$ خواهد بود و بریدگی در طول نیم خط $\theta = \alpha$ صورت می‌پذیرد. همه چنین خطوط شاخه‌ای از یک نقطه می‌گذرند که در اینجا مبداء مختصات می‌باشد چنین نقطه‌ای را نقطه شاخه‌ای می‌نامند. بریدگیها را به صورت زیر نمایش می‌دهند.



خط شاخه‌ای $\theta = 0$ ($0 < \theta \leq 2\pi$)

۱۲. توابع $w = \sqrt{z}$ ، $w = \sqrt[n]{z}$

هرگاه $-\pi < \theta \leq \pi$ و $z = re^{i\theta}$ آنگاه $w = \sqrt{z}$ به علت آنکه دارای دو جواب

$$w = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{و} \quad w = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

است نمی‌تواند یک تابع باشد ولی هرکدام از توابع

$$w = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{و} \quad w = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

را یک شاخه تابع $w = \sqrt{z}$ نامیده و تابع $w = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ را شاخه اصلی آن می‌نامند. هرگاه

بنویسیم $w = u + iv$ داریم

$$v = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \quad , \quad u = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}$$

آنگاه در هر نقطه غیر از مبدا مختصات و نقاط روی خط شاخه‌ای $\theta = \pi$ ، u و v در معادلات

کشی ریمن صادق‌اند و داریم

$$v_r = \frac{\sqrt{r}}{2r} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{r} u_\theta \quad , \quad u_r = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{r} v_\theta$$

و

$$f(z) = e^{-i\theta} (u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \left(\frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{i}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt[2]{r}} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\theta} = \frac{1}{\sqrt[2]{r}} e^{-i\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{z}}$$

که در آن $\frac{1}{\sqrt[2]{z}}$ شاخه اصلی است.

همانند بحث فوق برای $w = \sqrt[n]{z}$ می توان به بررسی $w = \sqrt[n]{z}$ پرداخت (بررسی کنید).

۱۳. تابع توانی $w = z^c$

را چنین تعریف می کنیم $w = z^c = e^{c \ln z}$ بنابراین $w = e^{c \ln z}$ به علت چند مقداری بودن $\ln z$ تابع نیست. همانند بحث توابع لگاریتمی کافی است تنها به بررسی تابع $w = e^{c \ln z}$ پرداخت. که ما بحث در این مورد را به خواننده واگذار می کنیم و در اینجا تنها به محاسبه i^i می پردازیم

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i \ln e^{i\pi/2}} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$$

۹.۳. مسائل حل شده

۱. تبدیل مویبوسی بیابید که نقاط $z_1 = 0$ و $z_2 = 1+i$ را به ترتیب به روی نقاط $w_1 = 0$ و $w_2 = \frac{1}{2}$ بنگارد
با توجه به

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \frac{w_2-w_1}{w_2-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \frac{z_2-z_1}{z_2-z_2}$$

$$\frac{w - \frac{i}{2}}{w - \frac{1}{2}(1+i)} = \frac{z - 0}{z - 1} \frac{1+i - 0}{1+i - 1}$$

$$\frac{w - \frac{i}{2}}{w - \frac{1}{2}(1+i)} = \frac{z-i}{z-1} \frac{1}{i}$$

$$(w - \frac{i}{2})(1+i)(z-1) = (w - \frac{1}{2}(1+i))(z-i)$$

و یا

$$w[(1+i)(z-1)] - \frac{i}{2} (1+i)(z-1) = -\frac{1}{2} (1+i)(z-i) + w(z-i)$$

$$w(iz-1) = -\frac{1}{2} (1+i)(z-i) + \frac{i}{2} (1+i)(z-1) = -\frac{1}{2} (2z) = -z$$

در نتیجه تبدیل مورد نظر عبارت است از

$$w = -\frac{z}{iz-1}$$

۲. تبدیل مویبوسی بیابید که نقاط $\frac{1}{2}$ و 1 و 3 را به ترتیب به روی ∞ و 4 و $\frac{6}{5}$ بنگارد داریم

$$\frac{w-\infty}{w-\frac{6}{5}} \cdot \frac{4-\frac{6}{5}}{4-\infty} = \frac{z-\frac{1}{2}}{z-3} \times \frac{1-3}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{14}{5}}{w-\frac{6}{5}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{z-3} \quad (-4)$$

$$-4(w-\frac{6}{5})(z-\frac{1}{2}) = \frac{14}{5}(z-3)$$

و یا

$$w(z-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{10}(z-3) + \frac{6}{5}(z-\frac{1}{2})$$

و در نتیجه

$$w = \frac{z+3}{2z-1}$$

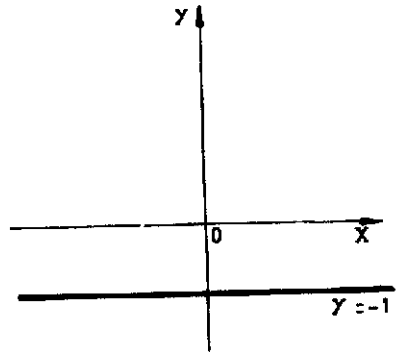
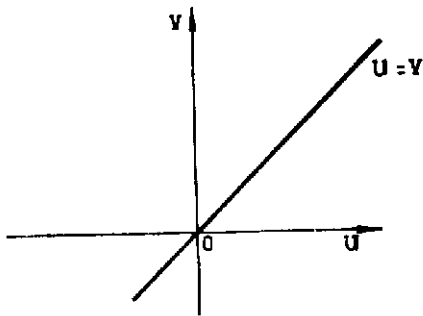
۳. نقش خط -1 را با تبدیل $w=(1+i)z-2$ پیدا کنید.

$$w = (1+i)z-2 = (1+i)(x+iy)-2 = x-y-2+i(x+y)$$

هرگاه بنویسیم $w=u+iv$ آنگاه می‌یابیم $u=x-y-2$ ، $v=x+y$ با توجه به -1 نتیجه

$$v=u$$

می‌شود $u=x-1$ و $v=x-1$ و از آنجا نتیجه می‌شود



یعنی خط $y = -1$ از صفحه xy به خط $v = u$ در صفحه uv تبدیل می شود.

۴. نقش ناحیه $-\pi < x < \pi$ و $1 < y < 2$ را با نگاشت $w = \sin z$ بیاید

$$w = \sin z = \sin xchy + i \cos xchy$$

با فرض $w = u + iv$ می یابیم

$$v = \cos xchy, \quad u = \sin xchy$$

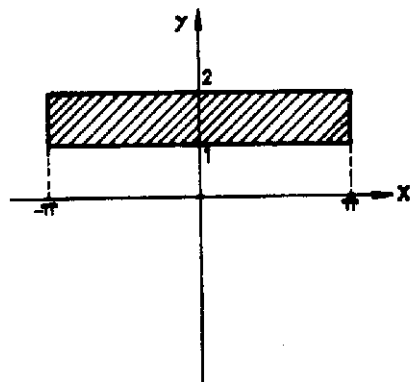
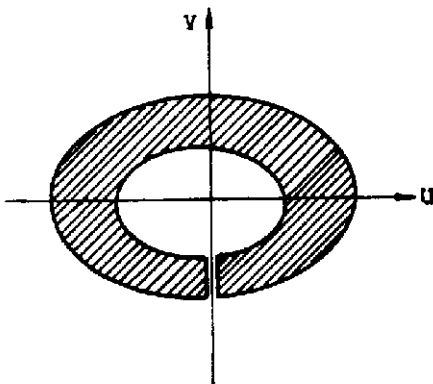
از ۱ = ییضی

$$\frac{u^2}{ch^2 y} + \frac{v^2}{sh^2 y} = 1$$

و از ۲ = ییضی

$$\frac{u^2}{ch^2 2} + \frac{v^2}{sh^2 2} = 1$$

حاصل می شود.



چون x در یک فاصله تناوب $\sin z$ تغییر می کند و تناظر بین نوار $-\pi < x < \pi$ و صفحه uv یک به یک است و از طرفی x مقادیر $-\pi$ و π را اختیار نمی کند همچنین $x=0$ به خط $u=0$ و $v = \sin x$ تبدیل می شود و چون $1 < y < 2$ پس مبدل ناحیه مورد نظر به حلقه بین دو بیضی فوق تبدیل می شود که در طول محور v بریده شده است.

۵. نقش ناحیه $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ را با نگاشت $w = e^z$ بیابید.

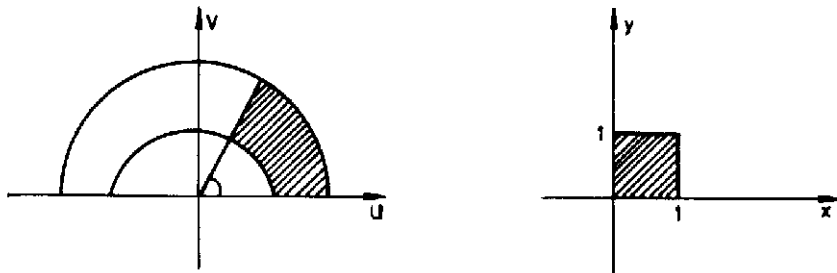
بانوشتن

$$z = x + iy, \quad w = \rho e^{i\phi}$$

می یابیم

$$\phi = y, \quad \rho = e^x$$

نوار $0 < x < 1$ به ناحیه $1 < \rho < e$ و نوار $0 < y < 1$ به ناحیه $0 < \phi < 1$ تبدیل می شود و در نتیجه ناحیه مبدل مورد نظر عبارت است از



۶. نشان دهید که با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ مرکز یک دایره به مرکز دایره دیگر تبدیل نمی شود.

دایره

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

را در نظر می گیریم. نظر به اینکه قرار است دایره به دایره تبدیل شود بنابراین لازم است که

$a \neq 0$ و $d \neq 0$ با تبدیل فوق دایره فوق به دایره

$$a(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$$

تبدیل می شود. معادلات این دایره را چنین می نویسیم

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} - \frac{d}{a}$$

$$\left(u + \frac{b}{2d}\right)^2 + \left(v - \frac{c}{2d}\right)^2 = \frac{b^2}{4d^2} + \frac{c^2}{4d^2} - \frac{a}{d}$$

برای اینکه مراکز دو دایره به یکدیگر تبدیل شوند لازم است که $\frac{b}{2a} = \frac{b}{2d}$ و از آنجا $a=d$ و همچنین

$$\frac{c}{2a} = -\frac{c}{2d}$$

و بنابراین $a=-d$ در نتیجه لازم است $a=d=0$ که خلاف فرض $a \neq 0$ و $d \neq 0$ است. در نتیجه تبدیل $w = \frac{1}{z}$ مراکز دایره فوق را به یکدیگر تبدیل نمی کند.

۷. نشان دهید که

$$|\sin hy| \leq |\sin z| \leq \cosh y$$

داریم

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

و

$$|\sin z|^2 = \cos^2 x \sinh^2 y + \sin^2 x \cosh^2 y = (\sin^2 x) \sinh^2 y + \sin^2 x \cosh^2 y$$

$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x \geq \sinh^2 y$$

در نتیجه

$$|\sin z| \geq |\sin hy|$$

از طرفی

$$|\sin z|^2 = \cos^2 x \sinh^2 y + (\cos^2 x) \cosh^2 y = \cosh^2 y - \cos^2 x \leq \cosh^2 y$$

بنابراین

$$|\sin z| \leq \cosh y$$

۸. مطلوب است محاسبه

$$\begin{aligned} \gamma^{z-\gamma i} &= e^{(\gamma+i)\ln \gamma} = e^{(\gamma+i)(\ln \gamma + i k \pi)} = e^{\gamma \ln \gamma - \gamma k \pi + i(\gamma \ln \gamma + k \pi \gamma)} \\ &= \{ \cos(\gamma \ln \gamma) + i \sin(\gamma \ln \gamma) \} e^{\gamma \ln \gamma - \gamma k \pi} \end{aligned}$$

۹. نشان دهید که

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$$

فرض کنید $w = \tanh^{-1} z$ و از آنجا

$$z = \tanh w = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$$

و یا

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{\gamma e^w}{\gamma e^{-w}} = e^{2w}$$

بنابراین

$$w = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$$

و یا

$$2w = \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$$

۱۰.۳. تمرینات

۱. نقش هریک از منحنیهای زیر را با نگاشت $w = z^2$ بیابید.

d) $y^2 = x^2 + 1$ c) $y = 1 + x$ b) $x = 3$ a) $y = -x$

۲. نقش هریک از نواحی زیر را با نگاشت $w = z^2$ بیابید:

c) $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arg} z < \frac{\pi}{4}$ b) $0 \leq y \leq 1$ a) $|z| > 2$

۳. نقش هریک از منحنیهای زیر را با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید:

c) $0 < x < 1, 0 < y < 1$ b) $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arg} z < \frac{\pi}{4}$ a) $0 < \operatorname{arg} z < \frac{\pi}{4}$

۴. نقش هریک از نواحی زیر را با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

d) $|z - 2i| = 3$ c) $x = 1$ b) $y = x - 1$ a) $|z + 1| = 1$

۵. نقش ناحیه $0 \leq \operatorname{arg} z \leq \frac{\pi}{4}$ را با هریک از نگاشتهای زیر بیابید:

e) $w=z^2$ d) $w=-iz^2$ c) $w=iz^2$ b) $w=z^2$ a) $w=iz$

۶. تبدیل مویبوسی بیاید که

a. سه نقطه ۰، ۱ و ۲ را بر روی ۱، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ بنگارد.

$-ib$ و ۰ و i را بر روی ۰ و -1 و ∞ بنگارد.

c. $z=0$ یک نقطه ثابت آن باشد.

d. ناحیه $|z| \leq 1$ را بر روی $|w| \leq 1$ طوری بنگارد که $z = \frac{i}{4}$ بر روی $w=0$ نگاشته شود.

e. ناحیه $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ را به روی قرص یک $|w|=1$ بنگارد.

f. نقاط $-i$ و i نقاط ثابت آن باشند.

۷. نشان دهید که تبدیل $w=iz+i$ نیم صفحه $x > 0$ را به روی نیم صفحه $v > 1$ می نگارد.

۸. نقش ناحیه $|z| > 1$ را با تبدیل $w=(1-i)z$ بیاید.

۹. نقش هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ بیاید.

۱۰. ثابت کنید که اگر مبدا مختصات نقطه ثابت یک تبدیل دوخطی باشد آنگاه آن تبدیل را

می توان به صورت $w = \frac{z}{cz+d}$ نوشت.

۱۱. نشان دهید که با تبدیل $w = \frac{z-2}{z}$ قرص $|z-1| \leq 1$ به روی نیم صفحه $\operatorname{Re} w \leq 0$ نگاشته

می شود.

۱۲. نقش هریک از نواحی زیر را با تبدیل $w=e^z$ بیاید.

(a) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $-1 < x < 1$

(b) $0 < y < 1$, $0 < x < 2$

(c) $0 < y < \frac{\pi}{4}$, $-3 < x < -2$

(d) $0 \leq y \leq \pi$, $x \geq 0$

(e) $-\pi \leq y \leq \pi$, $-1 \leq x \leq 3$

۱۳. نقشهای هریک از نواحی زیر را با نگاشت $w = \sin z$ بیاید.

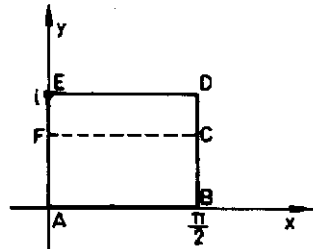
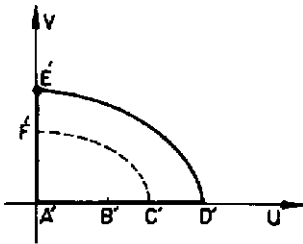
(a) $0 < y < 2$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < y < 1 \quad (b)$$

$$0 < x < 2\pi, \quad 1 < y < 2 \quad (c)$$

۱۴. نشان دهید که $w = \sin z$ خط $x=c$ ($0 < c < \frac{\pi}{4}$) را به طور یک به یک به روی شاخه سمت راست یک هذلولی می نگارد.

۱۵. نشان دهید که تحت تبدیل $w = \sin z$ نقش مرز ناحیه $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq y \leq 1$, پاره خطهای $A'D'$ و $A'E'$ و منحنی $E'D'$ است که در آن $E'D'$ قسمتی از یک بیضی است.



۱۶. نشان دهید که نگاشت $w = \cosh z$ پاره خط $z = iy$ ($0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$) را به روی پاره خط $0 \leq u \leq 1$ و $v = 0$ می نگارد.

۱۷. نشان دهید که تبدیل $w = \sin^2 z$ ناحیه $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$ را به روی ناحیه $v \geq 0$ می نگارد.

۱۸. نشان دهید که تحت تبدیل $w = (\sin z)^{1/2}$ نوار نیمه متناهی $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ و $y \geq 0$ به روی قسمتی از ربع اول که زیر خط $u=v$ واقع است نگاشته می شود. کرانه اش را مشخص کنید.

۱۹. نقش هریک از نواحی زیر را با تبدیل $w = \cos z$ بیابید.

$$b) \frac{1}{4} \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad a) y \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

۲۰. نقش ناحیه $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و $2 \leq |z| \leq 3$ را با تبدیل $w = \operatorname{Ln} z$ بیابید.

۲۱. با استفاده از صورت قطبی z نشان دهید که تبدیل $w = z + \frac{1}{z}$ هر دو نیمه بالائی و پائینی دایره $|z| = 1$ را به روی پاره خط $-2 \leq u \leq 2$ و $v = 0$ می نگارد.

۲۲. نشان دهید که

a. $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$, $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$

b. $|\sin hy| \leq |\cos z| \leq \cosh y$

c. $|\cosh z| \leq \cosh x$

d. $\sin^{-1} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{(1-z^2)})$

e. $\cos^{-1} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$

f. $\cosh^{-1} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$

g. $\tan^{-1} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$

۲۳. کلیه ریشه های معادله $\sin z = \cosh 4$ را بیابید.

۲۴. کلیه ریشه های معادله $\cos z = 2$ را بیابید.

۲۵. نشان دهید که $\overline{\cos(iz)} = \cos(\bar{iz})$ اگر و فقط اگر $z = n\pi i$.

۲۶. کلیه ریشه های معادله $\sinh z = i$ را بیابید.

۲۷. ثابت کنید که اگر

$$z = re^{i\theta} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad , \quad r > 0$$

آنگاه $\operatorname{Ln} z^2 = 2 \operatorname{Ln} z$

ولی این تساوی به ازای $-\pi < \theta < \pi$ برقرار نیست.

۲۸. نشان دهید که تابع $\frac{\operatorname{Ln}(z-i)}{z^2+i}$ همه جا بجز روی نیمخط $x \leq 0, y = 1$ تحلیلی است.

۲۹. هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط بنویسید.

a. $(1+i)^i$

b. $(1-i)^{2i}$

۳۰. نقش ناحیه $y > 1$ را با تبدیل $w = (1-i)z$ بیابید.

۳۱. نقش هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

(۱۹۲) توابع مختلط

۳۲. نشان دهید که ترکیب دو تبدیل خطی یک تبدیل خطی است.

۳۳. شاخه‌ای از $\operatorname{Ln}(z-1)$ را تعریف کنید که صفحه z بریده شده در طول نیمخط $x \geq 1$,

$y=0$ را بر روی نوار $0 < v < 2\pi$ در صفحه w بنگارد.

۳۴. تبدیل $w = \cosh z$ را بر حسب نگاشتهای زیر بیان کنید.

$$Z = e^z \quad , \quad w = \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right)$$

فصل چهارم

انتگرالگیری از توابع مختلط

۱.۴. انتگرال روی خط در صفحه مختلط

در توابع مختلط تنها به تعریف انتگرال روی منحنی می پردازند. برای این منظور منحنی C با معادله

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad ; \quad a \leq t \leq b$$

را در نظر می گیریم و فرض می کنیم $w = f(z)$ تابعی پیوسته بوده که برای این منحنی تعریف شده باشد. فاصله $a \leq t \leq b$ را با انتخاب مقادیر $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$ به n زیر فاصله تقسیم می کنیم و این موضوع سبب می شود که نقاط s_0, s_1, \dots, s_n بر منحنی C مشخص شوند. هم اکنون نقاط z_0, z_1, \dots, z_n را بر روی منحنی های جزء $s_0s_1, s_1s_2, \dots, s_{n-1}s_n$ به طور دلخواه انتخاب می کنیم آنگاه حد زیر در صورت وجود

$$\lim_{\substack{\sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \\ \max |\Delta z_k| \rightarrow 0}} f(z_k) \Delta z_k ; \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i \Delta y_k$$

به انتگرال خط تابع $f(z)$ بر منحنی C موسوم است و به صورت $\int_C f(z) dz$ نمایش داده می شود. بنابراین

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\substack{\sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \\ \max |\Delta z_k| \rightarrow 0}}$$

با فرض آنکه $f(z) = u + iv$ و $f(z_k) = u_k + iv_k$ می یابیم.

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k, \Delta y_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n [(u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i(u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k)]$$

بنابراین

$$\int_c f(z) dz = \int_c (u dx - v dy) + i \int_c (u dy + v dx) = \int_a^b (u x' - v y') dt + i \int_a^b (u y' + v x') dt =$$

$$\int_a^b (u + iv)(x' + iy') dt$$

از اینرو

$$\int_c f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) dz(t)$$

بسیاری از خواص انتگرال روی خط توابع حقیقی در توابع مختلط نیز برقرارند مثلاً هرگاه $c = c_1 + c_2$ به سادگی می توان ثابت کرد

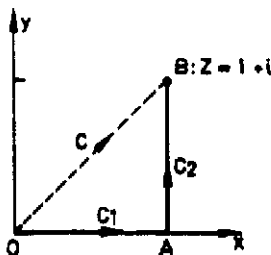
$$\int_c f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz$$

مثال ۱. از تابع $w = z^2$

ب - در طول OAB

الف - در طول OB

انتگرال بگیرید.



حل. معادله پارامتری OB عبارت است از

$$OB: \begin{cases} x=x \\ y=x \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

داریم

$$dz = (1+i)dx, \quad z' = (1+i)x', \quad z = x + ix = x(1+i)$$

بنابراین

$$\int_{OB} z' dz = \int_0^1 (1+i)^2 x' dx = \frac{(1+i)^2}{3}$$

انتگرال بر OAB چنین می نویسیم

$$\int_{OAB} z' dz = \int_{OA} z' dz + \int_{AB} z' dz$$

معادلات پارامتری OA و AB به ترتیب عبارت اند از

$$OA: \begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1; \quad AB: \begin{cases} x=1 \\ y=y \end{cases} \quad 0 \leq y \leq 1;$$

بر OA داریم

$$dz = dx, \quad z' = x', \quad z = x$$

همینطور بر AB داریم

$$dz = idy, \quad z' = (1+iy)', \quad z = 1 + iy$$

بنابراین

$$\int_{OAB} z' dz = \int_0^1 x' dx + i \int_0^1 (1+iy)' dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} (1+iy)^2 \Big|_0^1 = \frac{(1+i)^2}{3}$$

مثال ۲. از تابع $w = \frac{1}{z}$ در طول دایره یکه و در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرد

$$z = e^{i\theta} \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

نمایش دایره یکه است و از آنجا می یابیم

$$dz = ie^{i\theta} d\theta$$

بنابراین

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = 2\pi i$$

مثال ۳. از تابع $w = \frac{1}{z^2}$ در طول دایره یکبار در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{2i\theta}} = i \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0$$

به طور کلی می توان ثابت کرد

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0 & ; n \neq 1 \\ 2\pi i & ; n = 1 \end{cases}$$

(ثابت کنید).

مثال ۴. از هر یک از توابع $f(z) = \bar{z}$ و $g(z) = \frac{1}{z}$ در طول دایره یکبار در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید:

$$\int_{|z|=1} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta = 2\pi i$$

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{\bar{z}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{-i\theta}} = \int_0^{2\pi} ie^{2i\theta} d\theta = 0$$

۲.۴. برخی دیگر از خواص انتگرال روی خط مختلط

الف. هرگاه از تابع $w=f(z)$ روی منحنی A تا B و از B تا A انتگرال بگیریم آنگاه می یابیم

$$\int_A^B f(z) dz = - \int_B^A f(z) dz$$

ب. هرگاه α و β دو عدد ثابت باشند آنگاه

$$\int_c [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_c f(z) dz + \beta \int_c g(z) dz$$

ج - هرگاه L طول قوس منحنی c و M $|f(z)|$ آنگاه داریم

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq ML$$

در واقع

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z)| |z'(t)| dt \leq M \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = ML$$

در انتگرالگیری از توابع مختلط اصولاً با سه نوع از توابع سروکار داریم. دسته اول توابعی هستند که بر c چنانچه c بسته باشد در داخل c تحلیلی هستند. نوع دوم توابعی هستند که بر c و یا بینهایت نقطه واقع بر c یا درون c تحلیلی نیستند. دسته سوم توابعی هستند که بر c یا درون c در تعدادی متناهی نقاط تحلیلی نیستند.

چگونگی انتگرالگیری از این توابع را در این بخش و بخشهای آینده به تفصیل مورد بررسی قرار می دهیم. در بخش آخر به کمک انتگرالگیری به روش مختلط به محاسبه برخی انتگرالهای جالب حقیقی می پردازیم.

موضوع را با ارائه قضیه زیر که به قضیه انتگرال کشی یا به قضیه کشی گورسا موسوم است آغاز می کنیم و با توجه به این قضیه به چگونگی انتگرالگیری از توابع تحلیلی می پردازیم.

قضیه ۱ (قضیه انتگرال کشی)

هرگاه $f(z)$ بر ناحیه کراندار و همبند ساده D تحلیلی و $f'(z)$ پیوسته باشد آنگاه به ازای هر

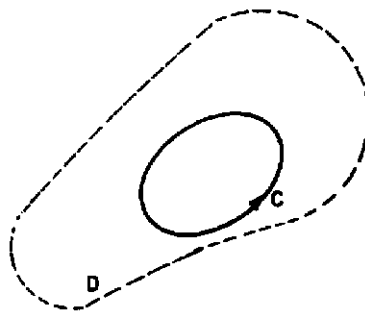
مسیر بسته c واقع در D

$$\oint_c f(z) dz = 0$$

که در آن انتگرالگیری بر منحنی بسته c در جهت مثلثاتی است.

اثبات. داریم:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (u dy + v dx)$$



با استفاده از قضیه گرین می توان نوشت

$$\oint_C f(z) dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

با توجه به تحلیلی بودن تابع $f(z)$ می یابیم

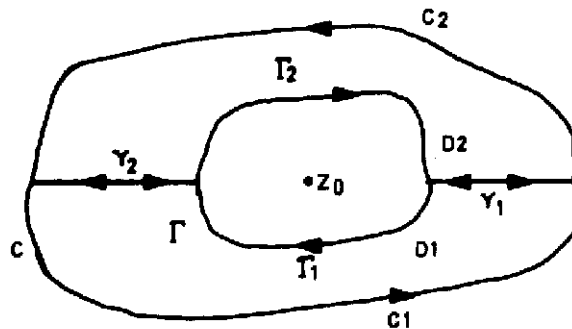
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

بنابراین

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

اثبات این قضیه با شرطی ضعیف تر توسط گورسا ارائه شده است. او نشان داد که شرط پیوستگی $f(z)$ اگر از قضیه می توان حذف نمود. این قضیه دارای کاربردهایی در حل مشکلات مربوط به توابع تحلیلی و غیرتحلیلی است. مثلاً هرگاه $f(z)$ درون C درون به جزء در نقطه z تحلیلی باشد آنگاه به ازای هر منحنی بسته Γ واقع در درون C که نقطه z یک نقطه درونی آن باشد داریم

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\Gamma} f(z) dz$$



که در آن انتگرالگیری بر C و Γ در جهت‌های مثلثاتی است. با رسم منحنی‌های γ_1 و γ_2 حلقه واقع بین دو منحنی C و Γ را به دو ناحیه D_1 و D_2 تبدیل می‌کنیم و به علت تحلیلی بودن $f(z)$ بر این دو ناحیه و مرز آنها مقادیر انتگرال تابع $f(z)$ بر روی این مرزها صفر است و با انتگرالگیری بر روی γ_1 و γ_2 دو جهت مختلف می‌یابیم

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{و یا}$$

که در آن انتگرالگیری بر C در جهت مثلثاتی و بر Γ در جهت خلاف مثلثاتی صورت می‌پذیرد و در نتیجه

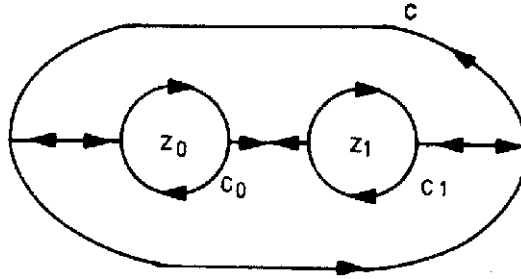
$$\oint_C f(z) dz = -\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} f(z) dz$$

که در آن انتگرالگیری در انتگرال اول و آخر در جهت مثلثاتی و در دومین انتگرال در خلاف جهت مثلثاتی انجام می‌شود

این موضوع را می‌توان برای تابع تحلیلی $f(z)$ که بر C و درون آن به جز در نقاط $z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_m, z_n$ تحلیلی باشد تعمیم داد. مثلاً هرگاه $f(z)$ تنها در دو نقطه z_1 و z_2 تحلیلی نباشد آنگاه داریم

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_0} f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz$$

که در آن انتگرالگیری بر C ، C_0 و C_1 در جهت مثلثاتی صورت می‌پذیرد.



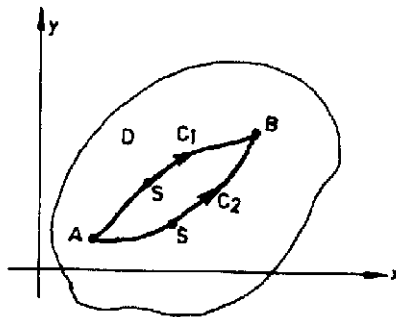
با توجه به قضیه ۱ می‌توان نتیجه گرفت که مقدار انتگرال $f(z)$ از A تا B از مسیری که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند مستقل است. در واقع هرگاه دو نقطه A و B را با دو منحنی C_1 و C_2 واقع در درون C که همدیگر را قطع نکنند به هم وکنیم آنگاه $\Gamma = C_1 + C_2$ یک منحنی بسته

است و با توجه به قضیه انتگرال کشی می‌یابیم

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0$$

و از آنجا



که در آن انتگرالگیری بر C_1 از A تا B و بر C_2 از B تا A محاسبه می‌شود و بنابراین

$$\int_{C_1} f(z) dz = - \int_{C_2} f(z) dz$$

و هرگاه انتگرالگیری بر C_2 را از B تا A به انتگرالگیری از A تا B تغییر دهیم آنگاه مشاهده می‌کنیم که انتگرالگیری از A تا B بر منحنیهای C_1 و C_2 با هم برابرند و از این به بعد چنین انتگرالی را به صورت $\int_A^B f(z) dz$ نمایش می‌دهیم و در این مورد قضیه زیر را داریم که بسیار شبیه قضیه انتگرال معین (قضیه نیوتن لایبنیتز) در توابع حقیقی است.

قضیه ۲. هرگاه $f(z)$ در حوزه همبند ساده، D تحلیلی باشد و فرض کنیم z_0 نقطه دلخواهی از D بوده و

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$$

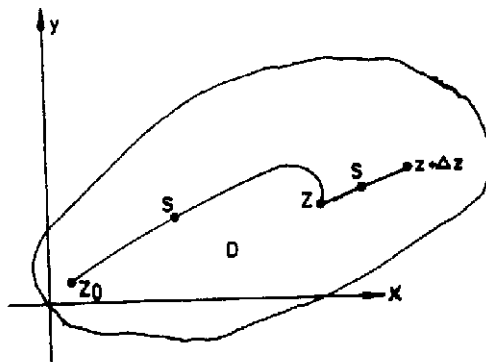
آنگاه

$$F'(z) = f(z)$$

همچنین به ازای هر دو نقطه A و B از D

$$\int_A^B f(z) dz = F(B) - F(A)$$

که در آن $F'(z) = f(z)$.



اثبات. به علت آنکه z یک نقطه داخلی D است. یک همسایگی N از z واقع در D موجود است. با انتخاب $z + \Delta z$ در این همسایگی عبارت مشتق را در نقطه z تشکیل داده می‌یابیم

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s) ds - \int_{z_0}^z f(s) ds \right] = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds$$

از طرفی می‌توان نوشت

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} ds = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) ds$$

حال چنین می‌نویسیم

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s)-f(z)] ds$$

تابع $f(z)$ به علت تحلیل بودن پیوسته نیز هست. بنابراین به ازای عدد مثبت ε عددی مثل δ موجود است به طوری که هرگاه $|\Delta z| < \delta$ آنگاه $|f(z+\Delta z)-f(z)| < \varepsilon$. هم اکنون δ را کوچکتر از شعاع همسایگی N از z می‌گیریم. چون انتگرالگیری از z تا $z+\Delta z$ است داریم

$$|f(s)-f(z)| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |s-z| \leq |\Delta z| < \delta$$

در آن صورت

$$\left| \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} [f(s)-f(z)] ds \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon \times |\Delta z| = \varepsilon$$

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z) \quad \text{در نتیجه}$$

$G(z)$ را یک تابع اولیه تابع $f(z)$ نامند هرگاه $G'(z) = f(z)$ بنابراین

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$$

یک تابع اولیه $f(z)$ است. نظر به اینکه $F'(z) = f(z)$ از این رو

$$G'(z) - F'(z) = 0$$

و بنابراین $G(z) - F(z) = c$ یعنی تفاضل دو تابع اولیه عددی ثابت است.

حال اگر A و B دو نقطه واقع در D باشند آنگاه با انتخاب یک نقطه Z_0 در D می توان

نوشت

$$\int_A^B f(z) dz = \int_A^{Z_0} f(z) dz + \int_{Z_0}^B f(z) dz = \int_{Z_0}^B f(z) dz - \int_{Z_0}^A f(z) dz = F(B) - F(A) = F(z) \Big|_A^B$$

مثلاً

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3}$$

بنابراین انتگرالگیری از توابع تحلیلی همانند انتگرالگیری از توابع حقیقی است. قواعد گوناگون انتگرالگیری همچون انتگرالگیری به روش جزء به جزء و روش تغییر متغیر و سایر قواعد را می توان در اینجا نیز به کار گرفت.

انتگرالگیری از توابع غیر تحلیلی بر C یا در D تنها وقتی امکان پذیر است که نمایش پارامتری منحنی در دست باشد و انتگرالگیری از آنها تنها با استفاده از

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) dz(t)$$

امکان پذیر است. مثالهایی در این مورد نیز در اول این فصل ارائه شده اند. بنابراین آنچه باقی می ماند انتگرالگیری از توابعی است که در برخی نقاط واقع بر C یا در وزن C تحلیلی نباشند. گرچه از کلیه این توابع با شناخت نمایش پارامتری C می توان انتگرال گرفت ولی هدف آن است که از این توابع بر منحنی C بدون نمایش پارامتری منحنی C انتگرال بگیریم. ما در راه رسیدن به چنین اهدافی نیاز به ارائه یک سری قضایای دیگر داریم. این قضایای قضایای بسیار جالب در توابع مختلط هستند که به شرح زیر ارائه می گردند.

قضیه ۳. (فرمول انتگرال کشی)

فرض کنید $f(z)$ بر ناحیه همبند ساده D تحلیلی و C یک منحنی بسته واقع در D و z نقطه‌ای در درون C باشد آنگاه داریم

$$\oint_C \frac{f(s)}{s-z} ds = 2\pi i f(z) \quad \text{یا} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{s-z} ds$$

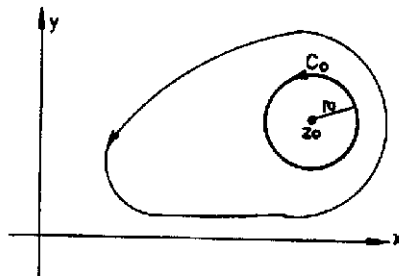
که در آن انتگرالگیری بر C در جهت مثلثاتی صورت می‌پذیرد

اثبات. می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(s)}{s-z} ds &= \oint_C \frac{f(z)}{s-z} ds + \oint_C \frac{f(s)-f(z)}{s-z} ds = f(z) \oint_C \frac{ds}{s-z} + \oint_C \frac{f(s)-f(z)}{s-z} ds \\ &= 2\pi i f(z) + \oint_C \frac{f(s)-f(z)}{s-z} ds \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم که آخرین انتگرال برابر صفر است. برای این منظور نشان می‌دهیم که قدر مطلق آن از هر عدد مثبت ϵ کوچکتر است. به ازای ϵ مفروض عدد مثبت $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2\pi}$ را در نظر می‌گیریم و با توجه به پیوسته بودن تابع $f(z)$ در z عدد مثبتی مثل δ موجود است به طوری که به ازای هر z که $|s-z| < \delta$ می‌توان نتیجه گرفت $|f(s)-f(z)| < \epsilon_1$. هم‌اکنون دایره Γ به مرکز z و با شعاعی کوچکتر یا مساوی δ طوری رسم می‌کنیم که در داخل C واقع شود آنگاه می‌یابیم

$$\left| \oint_C \frac{f(s)-f(z)}{s-z} ds \right| = \left| \oint_{\Gamma} \frac{f(s)-f(z)}{s-z} ds \right| \leq \frac{\epsilon_1}{\delta} \times 2\pi\delta = 2\pi\epsilon_1 = \epsilon$$



و چون این نامساوی به ازای هر ε برقرار است بنابراین داریم

$$\oint_c \frac{f(s)-f(z)}{s-z} ds = 0$$

و در نتیجه

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(s)}{s-z} ds$$

و در یک نقطه مفروض $z=z_0$ می توان نوشت

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

از روی این قضیه نتیجه می گیریم که مقدار تابع را با شناخت تابع بر روی مرز می توان به دست آورد و همچنین از دسته خاصی از توابع غیرتحلیلی به صورت $\frac{f(z)}{z-z_0}$ بر روی هر مسیر بسته C که f بر آن و درون آن تحلیلی است بدون استفاده از نمایش پارامتری منحنی C می توان انتگرال گرفت. برای این منظور مثال زیر را ارائه می کنیم.

مثال ۴. از تابع $f(z) = \frac{z^2+2}{z(z^2-2)}$ بر روی دایره یکه انتگرال بگیرد.

باتوجه به فرمول انتگرال کشی می یابیم.

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2+2}{z(z^2-2)} dz = \int_{|z|=1} \frac{z^2+2}{z} dz = 2\pi i \frac{z^2+2}{z^2-2} \Big|_{z=0} = -2\pi i$$

چنانچه مشاهده کردیم انتگرال یک تابع تحلیلی تابعی تحلیلی است و هم اکنون در موقعیتی هستیم که می توانیم چنین مطلبی را در مورد مشتقات توابع تحلیلی نیز اثبات کنیم. این موضوع را با ارائه قضیه زیر بیان می کنیم.

قضیه ۴. هرگاه مفروضات قضیه ۳ برقرار باشد آنگاه داریم

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds \quad (1)$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds \quad ; n=0, 1, 2, \dots \quad \text{و در حالت کلی (۲)}$$

که در آن انتگرالگیری در طول c در جهت مثلثاتی صورت می‌پذیرد.
اثبات. با توجه به تحلیلی بودن $f(z)$ در نقطه z $f'(z)$ موجود است و می‌توان نوشت

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

حال با به کار گرفتن فرمول انتگرال کشی برای توابع $f(z)$ و $f(z+\Delta z)$ داریم.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_c \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{s-(z+\Delta z)} - \frac{1}{s-z} \right] f(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \oint_c \frac{f(s) ds}{[s-(z+\Delta z)](s-z)}$$

با نوشتن

$$\frac{1}{[s-(z+\Delta z)](s-z)} = \frac{1}{(s-z)^2} + \frac{\Delta z}{(s-z)^2[s-(z+\Delta z)]}$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z \oint_c \frac{f(s)}{(s-z)^2[s-(z+\Delta z)]} ds \quad \text{می‌یابیم}$$

حال اگر $|\Delta z|$ را از d کوتاهترین فاصله از z تا هر نقطه از مرز c اختیار کنیم آنگاه داریم

$$|\Delta z \oint_c \frac{f(s) ds}{(s-z)^2[s-(z+\Delta z)]}| \leq \frac{ML|\Delta z|}{(d-|\Delta z|)d^2}$$

که در آن M یک کران بالای $|f(z)|$ و L طول قوس منحنی c است. حال اگر Δz به سمت صفر میل کند آنگاه عبارت سمت راست در نامساوی فوق به سمت صفر میل می‌کند و با توجه به آن تساوی (۱) به اثبات می‌رسد.

با به کار بردن فرمول (۱) به طور متوالی می‌توان به فرمول (۲) رسید.

قضیه ۵ (قضیه مورای) هرگاه f بر ناحیه همبند ساده D پیوسته بوده و به ازای هر مرز بسته c واقع در D $\oint_c f(z) dz = 0$ آنگاه f در سراسر D تحلیلی است.

اثبات. در قضیه ۲ بیان کردیم که مشتق تابع $F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$ در صورت تحلیلی بودن

$f(z)$ موجود و برابر $F'(z) = f(z)$ است. حال نظر به اینکه F تابعی تحلیلی است بنا به قضیه ۴ مشتق آن که برابر $F(z)$ است تحلیلی خواهد بود بدین طریق قضیه مررا به اثبات می‌رسد.

قضیه ۶ (قضیه اصل ماکزیمم). هرگاه F در ناحیه‌ای تحلیلی و غیر ثابت باشد آنگاه $|f(z)|$ مقدار ماکزیمم خود را روی مرز ناحیه اختیار می‌کند.

اثبات. هرگاه $f(z)$ مقدار ماکزیمم خود را روی مرز اختیار نکند و در یک نقطه z_0 متعلق به داخل D اختیار کند آنگاه ناحیه دایره‌ای $|z - z_0| < r$ را طوری اختیار می‌کنیم که در D واقع شود آنگاه به ازای هر z از ناحیه دایره‌ای داریم $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ و با انتگرالگیری از آن می‌یابیم.

$$\int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = 2\pi |f(z_0)|$$

و یا

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta \leq |f(z_0)| \quad (1)$$

حال با جایگزین کردن $z - z_0 = re^{i\theta}$ و $dz = ire^{i\theta} d\theta$ در فرمول انتگرال کشی

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

که در آن c_1 مرز ناحیه دایره‌ای $|z - z_0| < r$ است، می‌یابیم

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

و از آنجا

$$|f(z_*)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_* + re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta$$

و با توجه به این نامساوی و نامساوی (۱) می‌یابیم

$$|f(z_*)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} [|f(z_*)| - |f(z)|] d\theta = 0 \quad \text{و یا}$$

نظر به اینکه فرض شده است $|f(z)| \leq |f(z_*)|$ بنابراین تابع انتگرال اخیر نامنفی است و چون انتگرال آن صفر است بنابراین لازم است به ازای هر z داشته باشیم $|f(z)| = |f(z_*)|$ از اینرو $f(z)$ باید مطلقاً ثابت باشد که خلاف فرض قضیه است. بنابراین $|f(z)|$ ماکزیمم مقدار خود را در داخل C_1 نمی‌تواند اختیار کند و ماکزیمم را می‌بایستی روی C_1 اختیار کند.

حال اگر چنین نقطه‌ای بر C_1 را z_0 بنامیم نقطه z_0 یک نقطه داخلی در D خواهد بود. هم اکنون با مرکز قرار دادن z_0 در نظر گرفتن ناحیه دایره‌ای دیگر و با تعمیم اثبات فوق نتیجه می‌شود که $|f(z)|$ تنها می‌تواند مقدار ماکزیمم خود را روی مرز D اختیار می‌کند (ثابت کنید).

قضیه ۷ (قضیه لیوویل). هرگاه f تابعی تام و کراندار باشد آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است.

اثبات. در قضیه ۴ مشاهده کردیم که چنانچه ρ درون دایره $|s-z| = r$ تحلیل می‌شود آنگاه

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(s) ds}{(s-z)^{n+1}}$$

حال اگر M کران بالای $|f(z)|$ باشد آنگاه به نامساوی زیر که به نامساوی کشی موسوم است می‌رسیم

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

و به ازای $n=1$ داریم

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

به علت تام بودن تابع $f(z)$ می‌توان r را هر قدر که مایل باشیم بزرگ اختیار نمود. حال چنانچه r به سمت بی‌نهایت میل می‌کند می‌یابیم $f'(z) = 0$ و از آنجا $f(z) = c$ و اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

قضیه ۸ (قضیه اصلی جبر). هر چند جمله‌ای به صورت

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad ; \quad a_n \neq 0$$

لااقل دارای یک صفر است. یعنی نقطه‌ای مانند z_0 موجود است به طوری که

$$p_n(z_0) = 0$$

اثبات. چنانچه به ازای هر z ، $p_n(z) \neq 0$ آنگاه عبارت $f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$ همه جا دارای مشتق $f'(z) = -\frac{p'_n(z)}{p_n^2(z)}$ خواهد بود. می‌توان ثابت کرد که عددی مثل R موجود است که به ازای هر z ، $|z| \geq R$ ، داریم (تمرین ۸)

$$|f(z)| = \frac{1}{|p_n(z)|} < \frac{2}{|a_n|R^n}$$

در نتیجه $|f(z)|$ کراندار است و به علت تحلیلی بودن $f(z)$ لازم است که $f(z)$ یا $p_n(z)$ تابعی ثابت باشد که خلاف فرض تعریف یک چند جمله‌ای است. حال بعد از ارائه قضایای جالب فوق مجدداً به چگونگی محاسبه انتگرال توابع غیر تحلیلی ای می‌پردازیم که در یک یا چند

نقطه واقع بر مرز انتگرالگیری یا درون آن تحلیلی نیستند. قضایای فوق ما را برای رسیدن به چنین اهدافی یاری خواهند نمود. در هر صورت قبل از بررسی انتگرال چنین توابعی نیاز به شناخت سریها و علی الخصوص سریهای توانی مختلط، سریهای موسوم به سریهای تیلور و لوران داریم که در ذیل به معرفی آنها می پردازیم.

۳.۴. سریهای توانی، سریهای تیلور و لوران

هرگاه $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد آنگاه عبارت $z_1 + z_2 + \dots$ که آن را به صورت

صوری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ نیز می نویسند به یک سری از اعداد مختلط موسوم است. مثلاً

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1+i)^n}{n!} \right\} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1+i)^n}{n!} \right\}$$

یک سری از اعداد

مختلط است. بحث در مورد دنباله‌ها و سریهای توابع مختلط همانند بحثهای متناظر در توابع حقیقی است. ما در اینجا نمی خواهیم بحثهای جامعی در مورد دنباله‌ها و سریها در توابع مختلط را ارائه نمایم در اغلب اوقات می توان از قوانین موجود در توابع حقیقی همچون قواعد همگرایی و واگرایی استفاده کرد و در توابع مختلط آنها را به کار گرفت. مجدداً متذکر می شویم که ما بدان جهت بحث مربوط به انتگرالها را رها کرده و به سریها روی آورده ایم که به کمک آنها بتوانیم به نحوی مشکلات انتگرالگیری را حل کنیم و برای این منظور تنها نیاز به شناخت دسته‌ای خاص از سریها، موسوم به سریهای توانی داریم.

هریک از سریهای

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

$$C_0 + C_1 (z-z_0) + C_2 (z-z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

به ترتیب به سریهای توانی در حول مبدأ مختصات و حول نقطه z_0 موسوم‌اند. مابین سریهای توانی سریهای توانی تیلور و لوران از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و ما در ذیل به معرفی آنها می‌پردازیم.

قضیه ۱ (قضیه تیلور). فرض کنید f در درون دایره C با مرکز z_0 تحلیلی و z_0 نقطه‌ای در درون C باشد آنگاه داریم.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

که در آن

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

و C_1 دایره‌ای به مرکز z_0 واقع در درون C است.

اثبات. دایره C و C_1 را به ترتیب با شعاعهای r_1 و r_2 می‌گیریم و فرض می‌کنیم z_0 نقطه‌ای واقع در درون C_1 و C و $|z-z_0|=r$ آنگاه داریم $r_1 < r < r_2$ به علت تحلیلی بودن $f(z)$ بر C_1 و درون آن می‌توان نوشت

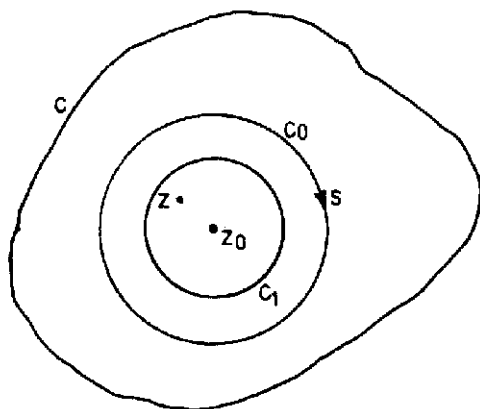
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s) ds}{s-z}$$

که در آن z یک نقطه درونی C_1 و انتگرالگیری بر C_1 در جهت مثلثاتی است. با توجه به اینکه به ازای $|u| < 1$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^{k-1} + \frac{u^k}{1-u}$$

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

$$\frac{1}{s-z_0} \left\{ 1 + \frac{z-z_0}{s-z_0} + \dots + \left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{k-1} + \frac{1}{1+\frac{z-z_0}{s-z_0}} \left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^k \right\}$$



چون $\left| \frac{z-z_0}{s-z_0} \right| < 1$ با ضرب طرفین این تساوی در $f(s)ds$ و انتگرالی بر روی C_1 و توجه به اینکه

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0); n=0, 1, \dots$$

می یابیم

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z-z_0)^{k-1} + R_k(z)$$

که در آن

$$R_k(z) = \frac{(z-z_0)^k}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s) ds}{(s-z)(s-z_0)^k}$$

با توجه به اینکه

$$|s-z| \geq ||s-z_0| - |z-z_0|| = r_1 - r$$

که در آن

$$r = |z - z_0|, r_1 = |s - z_0|$$

حال اگر M یک کران بالای $|f(s)|$ در D باشد آنگاه داریم.

$$|R_k(z)| \leq \frac{r^k}{2\pi} \frac{2M\pi r_1}{(r_1 - r)r_1^k} = \frac{M r_1}{r_1 - r} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k$$

و چون $\frac{r}{r_1} < 1$ بنابراین $\lim_{k \rightarrow \infty} |R_k(z)| = 0$ در نتیجه به ازای هر z که $|z - z_0| < r$ می‌یابیم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

که در آن

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

سری توانی حاصل به سری تیلور حول نقطه $z = z_0$ موسوم است. سری تیلور در حول مبدأ مختصات به سری مکلورن موسوم است. مثلاً در ذیل سری مکلورن چند تابع مقدماتی ارائه شده است.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots; \quad |z| < \infty$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots; \quad |z| < \infty$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots; \quad |z| < \infty$$

$$\sin hz = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots; \quad |z| < \infty$$

$$\cos hz = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots; \quad |z| < \infty$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - + \dots; \quad |z| < 1$$

$$\operatorname{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \dots; \quad |z| < 1$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right); \quad |z| < 1$$

همینطور می توان ثابت کرد.

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots; \quad |z| > 0$$

$$\operatorname{tanz} = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots; \quad |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}(1+z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots; \quad |z| > 0$$

$$\frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - + \dots \quad |z| > 0$$

$$\frac{1}{z^2} = 1 + 2(z+1) + 3(z+1)^2 + \dots; \quad |z+1| < 1$$

$$e^{z+1} = e\left[1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \dots\right] \quad |z| < \infty$$

هم اکنون مجدداً به توابع تحلیلی بر می گردیم و برخی از خواص آنها را مورد بررسی قرار

می دهیم چنانچه $f(z)$ در z تحلیلی باشد آنگاه می توان نوشت.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

که در آن $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ ، هرگاه تابع $f(z)$ در z_0 طوری باشد که

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

آنگاه z_0 را یک صفر مرتبه m تابع $f(z)$ می نامند.

قضیه ۲. صفرهای تابع تحلیلی $f(z)$ تنها هستند. یعنی هرگاه z_0 یک صفر مرتبه m تابع تحلیلی $f(z)$ باشد آنگاه یک همسایگی از z_0 موجود است به طوری که به ازای هر $z \neq z_0$ از این همسایگی $f(z) \neq 0$.

اثبات. در بسط تیلور تابع $f(z)$ در حول نقطه z_0 داریم

$$a_m \neq 0, a_n = 0; n=1, \dots, m-1$$

و

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z-z_0)^n$$

با فرض $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z-z_0)^n$ مشاهده می کنیم که $g(z)$ تابعی تحلیلی در z_0 است

و $a_m \neq 0$ ، $g(z_0) = a_m \neq 0$. نظر به پیوسته بودن $g(z)$ در z_0 به ازای هر عدد مثبت ε عددی مثل δ موجود است به طوری که به ازای هر z با $|z-z_0| < \delta$ داریم $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$. با انتخاب $\varepsilon = \frac{1}{4} |a_m|$ عددی δ می متناظر با آن را به δ نمایش می دهیم آنگاه به ازای $|z-z_0| < \delta$ داریم $|g(z) - a_m| < \frac{1}{4} |a_m|$ حال همسایگی به مرکز z_0 و به شعاع $\frac{1}{4} |a_m|$ همسایگی مورد نظر است و به ازای هر $z \neq z_0$ از این همسایگی $g(z) \neq 0$ زیرا اگر

به ازای $z = z_1$ از این همسایگی $g(z_1) = 0$ آنگاه با جایگزین کردن z_1 به جای z در نامساوی فوق نتیجه می شود $|a_m| < \frac{1}{\rho} |a_m|$ که امری خلاف است. در نتیجه قضیه به اثبات می رسد. هم اکنون با ارائه قضیه زیر به معرفی سری لوران می پردازیم.

قضیه ۳ (قضیه لوران). هرگاه $f(z)$ در ناحیه D و مرز آن به جز در نقطه z_0 واقع در D تحلیلی باشد آنگاه

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n ; c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

که در آن c یک منحنی بسته و z_0 نقطه ای واقع در حلقه بین دو دایره متحدالمرکز c_1 و c_2 به مرکز z_0 واقع در D است.

اثبات. هرگاه دایره Γ به مرکز z_0 واقع در حلقه بین دو دایره c_1 و c_2 را در نظر بگیریم آنگاه داریم

$$\oint_{c_1} \frac{f(s) ds}{s-z} - \oint_{c_2} \frac{f(s) ds}{s-z} - \oint_{\Gamma} \frac{f(s) ds}{s-z} = 0.$$

با توجه به فرمول انتگرال کشی می یابیم

$$\oint_{c_1} \frac{f(s) ds}{s-z} - \oint_{c_2} \frac{f(s) ds}{s-z} - 2\pi i f(z) = 0.$$

و از آنجا

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(s) ds}{s-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2} \frac{f(s) ds}{s-z} \quad (1)$$

اکنون چنین می نویسیم

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0} + \frac{1}{(s-z_0)^2} (z-z_0) + \dots + \frac{1}{(s-z_0)^k} (z-z_0)^{k-1} + (z-z_0)^k \frac{1}{(s-z)-(s-z_0)^k} \quad (2)$$

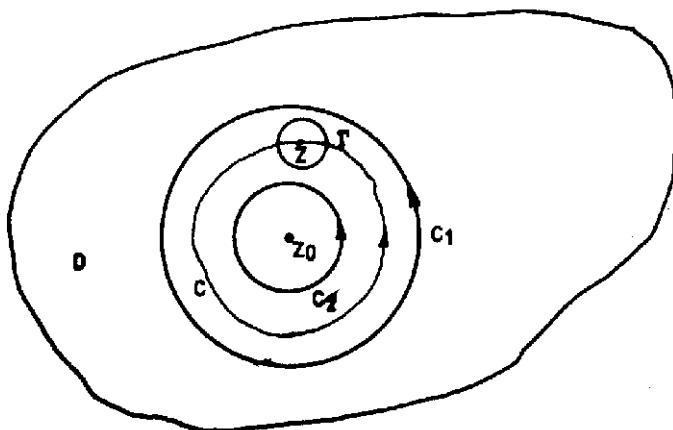
$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \times \frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} + \frac{s-z_0}{(z-z_0)^2} + \dots +$$

$$\frac{(s-z_0)^{k-1}}{(z-z_0)^k} + \frac{1}{(z-z_0)^k} \times \frac{(s-z_0)^k}{z-s}$$

همینطور

$$\frac{1}{s-z} = (z-z_0)^{-1} + (z-z_0)^{-2} \times \frac{1}{(s-z_0)^{-1}} + \dots + (z-z_0)^{-k} \times \frac{1}{(s-z)^{-k+1}} +$$

$$\frac{1}{(z-z_0)^k} \times \frac{1}{(z-s)(s-z_0)^{-k}} \quad (۳)$$



با ضرب طرفین تساویهای (۲) و (۳) در $f(s) ds$ و انتگرالگیری بر روی c که با انتگرالگیری بر c_1 و c_2 برابرند و جمع طرفین تساویهای حاصل و با توجه به تساوی (۱) می‌یابیم

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_{k-1}(z-z_0)^{k-1} + R_k(z) + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_{-2}(z-z_0)^{-2} + \dots + c_{-k}(z-z_0)^{-k} + Q_k(z)$$

که در آن

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (k-1), \pm k$$

$$Q_k(z) = \frac{1}{2\pi i (z-z_0)^k} \oint_{c_1} \frac{(s-z_0)^k f(s) ds}{z-s}$$

$$R_k(z) = \frac{(z-z_0)^k}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(s) ds}{(s-z)(s-z_0)^k}$$

هرگاه $r = |z-z_0|$ آنگاه $r_1 < r < r_2$ ، همانند آنچه در قضیه تیلور گفته شد می توان ثابت کرد.

$$|Q_k(z)| \leq \frac{Mr_1}{r-r_1} \left(\frac{r_1}{r}\right)^k \quad \text{و همچنین} \quad R_k(z) \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty$$

و به علت آنکه $\frac{r_1}{r} < 1$ داریم $Q_k(z) \rightarrow 0$ و در نتیجه قضیه لوران به اثبات می رسد.

بدیهی است که بسط تابع $f(z)$ به صورت یک سری لوران در حول نقطه z_0 که در آن نقطه $f(z)$ غیر تحلیلی است با توجه به قضیه فوق امکان پذیر نیست. زیرا به علت غیر تحلیلی بودن $f(z)$ در z_0 محاسبه ضرایب c_n ممکن نیست. ولی هرگاه بتوان به روشی غیر از روش انتگرالگیری به محاسبه ضرایب سری لوران پرداخت علی الخصوص به طریقی ضریب c_{-1} را محاسبه نمود آنگاه می یابیم $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) dz$ و از آنجا انتگرال تابع غیر تحلیلی $\oint_c f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$ مساوی آن است از روی مسیر c که z_0 یک نقطه داخلی آن است از روی تساوی $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) dz$ قابل محاسبه است. c_{-1} با ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران تابع $f(z)$ در حول z_0 از اهمیت ویژه ای برخوردار است زیرا با محاسبه آن می توان به محاسبه انتگرال توابع غیر تحلیلی پرداخت. c_{-1} را مانده تابع $f(z)$ در نقطه z_0 می نامند و به صورت $Res_{z=z_0} f(z)$ نمایش می دهند. بنابراین

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$$

مثال ۱. هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$a) \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$$

$$b) \int_{|z|=1} z^2 e^{1/z} dz$$

(a) می‌نویسیم

$$\frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \cos z = \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots \right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{z} + \frac{1}{4} z - \dots$$

و از آنجا خواهیم داشت

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} \right) = -\pi i$$

همینطور برای انتگرال دوم می‌نویسیم

$$z^2 e^{1/z} = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots \right) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \dots$$

در نتیجه:

$$\operatorname{Res}_{z=0} z^2 e^{1/z} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

و از آنجا

$$\int_{|z|=1} z^2 e^{1/z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} z^2 e^{1/z} = 2\pi i \times \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$$

همانند فوق می‌توان به محاسبه انتگرال توابع غیر تحلیلی‌ای پرداخت که در چند نقطه واقع در درون مرز بسته‌ای تحلیلی نیستند. برای این منظور قضیه زیر را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۴ (قضیه مانده‌ها). هرگاه (z) فبمر مرز ساده و بسته c تحلیلی و در درون آن

به جز در نقاط z_1, z_2, \dots, z_n تحلیلی باشد آنگاه.

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=z_k; k=1, 2, \dots, n} \operatorname{Res} f(z)$$

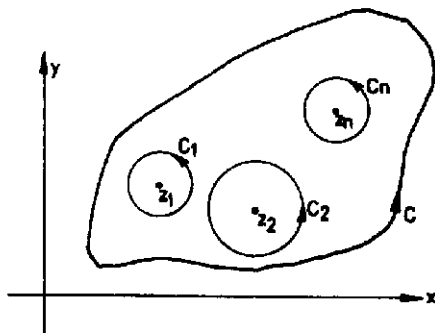
اثبات. n دایره c_1 و c_2 و c_3 و \dots و c_n به مراکز z_1 و z_2 و z_3 و \dots و z_n را طوری رسم

(۲۲۰) انتگرالگیری از توابع مختلط

می‌کنیم که در داخل منحنی بسته C بوده و با هم نقطه مشترکی نداشته باشند آنگاه می‌توان نوشت.

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz$$

$$= \underset{z=z_1}{\gamma\pi i \operatorname{Res} f(z)} + \underset{z=z_2}{\gamma\pi i \operatorname{Res} f(z)} + \dots + \underset{z=z_n}{\gamma\pi i \operatorname{Res} f(z)} = \gamma\pi i \sum_{z=z_k; k=1,2,\dots,n} \operatorname{Res} f(z)$$



مثال ۲. مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z|=r} \frac{z^r+1}{z(z+1)} dz$$

$$\oint_{|z|=r} \frac{z^r+1}{z(z+1)} dz = \gamma\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{z^r+1}{z(z+1)} + \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^r+1}{z(z+1)} \right)$$

برای یافتن مانده $\frac{z^r+1}{z(z+1)}$ در نقطه $z=0$ بسط لوران این تابع را در نقطه $z=0$ می‌یابیم. با فرض

$$g(z) = \frac{z^r+1}{z+1} \text{ می‌نویسیم}$$

$$\frac{1}{z} \frac{z^r+1}{z+1} = \frac{1}{z} g(z) = \frac{1}{z} [g(0) + g'(0)z + \dots]$$

بنابراین

$$\operatorname{Rez}_{z=0} \frac{1}{z} \frac{z^2+1}{z+1} = g(0) = \frac{z^2+1}{z+1} \Big|_{z=0} = 1$$

و همینطور با نوشتن $h(z) = \frac{z^2+1}{z}$ می‌یابیم.

$$\frac{1}{z+1} \frac{z^2+1}{z} = \frac{1}{z+1} h(z) = \frac{1}{z+1} [h(-1) + h'(-1)(z+1) + \dots]$$

و از آنجا

$$\operatorname{Rez}_{z=-1} \frac{1}{z+1} \frac{z^2+1}{z} = h(-1) = \frac{z^2+1}{z} \Big|_{z=-1} = -2$$

بنابراین

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z(z+1)} dz = 2\pi i (1 - 2) = -2\pi i$$

چنانچه مشاهده کردیم برای محاسبه انتگرال توابع غیر تحلیلی بر روی یک منحنی بسته می‌توان به محاسبه مقادیر مانده این تابع در نقاط غیر تحلیلی مورد نظر پرداخت و به کمک آن به محاسبه انتگرال همت گماشت. بدین جهت است که محاسبه مقادیر مانده توابع غیر تحلیلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در برخی از موارد این کار به سادگی صورت می‌پذیرد و این موضوع بیشتر به نوع خود تابع (z) گروابسته است و ما بنا داریم به چگونگی محاسبه مقادیر مانده برای دسته خاصی از توابع (z) کاربردپذیر ولی قبل از محاسبه آنها تعاریف زیر را می‌آوریم که در بحثهای مربوط به محاسبه مانده‌ها برای پیشرفت کار مفید هستند.

تعریف ۱. نقطه z_0 را یک نقطه تکین یا یک نقطه منفرد تابع (z) گزنامند هرگاه (z) در این نقطه تحلیلی نباشد.

تعریف ۲. هرگاه بسط لوران تابع (z) در حول نقطه تکین z_0 را به صورت زیر بنویسیم.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n$$

آنگاه $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n$ یعنی جملات با توانهای منفی در بسط لوران را قسمت اصلی

بسط لوران می نامند.

تعریف ۳. نقطه تکین z_0 یک نقطه تکین اساسی نامند هرگاه قسمت اصلی بسط لوران دارای تعداد نامتناهی جمله باشد.

تعریف ۴. نقطه تکین z_0 را یک قطب مرتبه m ام تابع $f(z)$ نامند هرگاه همه ضرایب c_n به ازای $n > m$ در قسمت اصلی بسط لوران تابع $f(z)$ در حول نقطه z_0 برابر صفر باشد و $c_{-m} \neq 0$ یعنی:

$$c_n = 0 ; n = m+1, m+2, \dots \text{ و } c_{-m} \neq 0$$

به عبارت دیگر بسط لوران تابع $f(z)$ در حول z_0 به صورت زیر باشد.

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

هر قطب مرتبه اول را یک قطب ساده می نامند.

تعریف ۵. نقطه تکین z_0 را یک نقطه تکین برداشتنی نامند هرگاه $f(z)$ در z_0 بتوان طوری تعریف کرد که تابع غیر تحلیلی در z_0 به تابعی تحلیلی در z_0 تبدیل شود.

مثال ۳. سری لوران هر یک از توابع زیر را بیابید و با توجه به آن نوع نقاط تکین را مشخص کنید.

a) $f(z) = z^x e^{1/z}$

b) $f(z) = \frac{\cos z^2}{z^3}$

c) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$

d) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

در همه توابع فوق $z=0$ یک نقطه تکین است.

$$z^r e^{1/z} = z^r \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots \right) = z^r + z + \frac{1}{2!} \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^2} + \dots$$

یعنی نقطه $z=0$ یک نقطه تکین اساسی است.

$$\frac{\cos z^r}{z^0} = \frac{1}{z^0} \cos z^r = \frac{1}{z^0} \left(1 - \frac{1}{2!} z^r + \frac{1}{4!} z^{2r} - \dots \right) = \frac{1}{z^0} - \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{4!} z^r + \dots$$

بنابراین نقطه تکین $z=0$ یک قطب مرتبه پنجم است.

$$\frac{\sin z}{z^1} = \frac{1}{z^1} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \dots$$

یعنی $z=0$ یک قطب مرتبه اول یا یک قطب ساده است.

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots$$

و با تعریف $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ در نقطه $z=0$ به صورت $f(0) = 1$ تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ در $z=0$ تحلیلی خواهد شد. بنابراین نقطه صفر یک نقطه تکین برداشتنی $f(z)$ است.

۴.۴. محاسبه مقادیر مانده‌ها

هرگاه $f(z)$ در z_0 دارای قطب مرتبه m باشد آنگاه به سادگی می‌توان مانده $f(z)$ در z_0 محاسبه نمود. با توجه به اینکه z_0 قطب مرتبه m تابع $f(z)$ است می‌بایم

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

با ضرب طرفین این تساوی در $(z-z_0)^m$ داریم

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_{-2}(z-z_0)^{m-2} + \dots + c_{-m} + c_0(z-z_0)^m + c_1(z-z_0)^{m+1} + \dots$$

با $m-1$ بار مشتقگیری از طرفین این رابطه نسبت به z و جایگزین کردن z_0 به جای z در نتیجه

$$(m-1)! c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

حاصل می‌بایم.

و از آنجا

$$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

هرگاه $z=z_0$ یک قطب ساده $f(z)$ باشد آنگاه

$$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z)$$

مثال ۱. مانده‌های تابع $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2+4}$ را بیابید.

این تابع دارای دو قطب ساده $z = \pm 2i$ است و داریم

$$\operatorname{Res}_{z=2i} \frac{z^2+1}{z^2+4} = \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i) \frac{z^2+1}{z^2+4} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2+1}{z+2i} = \frac{-3}{2i} = \frac{3}{4} i$$

$$\operatorname{Res}_{z=-2i} \frac{z^2+1}{z^2+4} = \lim_{z \rightarrow -2i} (z+2i) \frac{z^2+1}{z^2+4} = \frac{-3}{-2i} = -\frac{3}{4} i$$

مثال ۲. مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} dz$$

تابع $\frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$ دارای قطب ساده $z=0$ و قطب مرتبه دوم $z=\pi$ در داخل دایره $|z|=4$

است.

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\pi} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} = \lim_{z \rightarrow \pi} ((z-\pi)^2 \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2})' = \lim_{z \rightarrow \pi} (\frac{\cos z}{z})' = \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{-z \sin z - \cos z}{z^2} = \frac{1}{\pi^2}$$

بنابراین

$$\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0, \pi} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \right) = \frac{4i}{\pi}$$

در حالتی که $f(z)$ را بتوان به صورت $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ نوشت که در آن $P(z)$ و $q(z)$ توابعی

تحلیلی در z_0 هستند و $p(z_0) \neq 0$ و $q(z_0) = 0$ ولی $q'(z_0) \neq 0$ آنگاه.

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{q'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2}q''(z_0)(z-z_0)^2 + \dots} = \frac{1}{z-z_0} \frac{p(z)}{g(z)}$$

$\frac{p(z)}{g(z)}$ تابعی تحلیلی در z_0 است و با توجه به اینکه $g(z_0) = q'(z_0)$ می توان نوشت

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{z-z_0} \left[\frac{p(z_0)}{q'(z_0)} + \left(\frac{p(z)}{g(z)} \right)' \Big|_{z=z_0} (z-z_0) + \dots \right]$$

بنابراین $\frac{p(z)}{q(z)}$ دارای قطب ساده است و در نتیجه

$$\text{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

یعنی هرگاه $f(z)$ در z_0 دارای قطب ساده باشد آنگاه داریم

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{q'(z)}$$

مثال ۳. مانده های تابع $f(z) = \frac{z^2+1}{4z^3+3z^2+z}$ را در نقاط $z=0$ و $z=-1$ بیابید.

$$\text{Res}_{z=0} \frac{z^2+1}{4z^3+3z^2+z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2+1}{4z^2+3z+1} = 1$$

$$\text{Res}_{z=-1} \frac{z^2+1}{4z^3+3z^2+z} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^2+1}{4z^2+3z+1} = -\frac{1}{3}$$

۵.۴. محاسبه انتگرالهای حقیقی به کمک انتگرالگیری به روش مختلط

۱. محاسبه انتگرالهایی به صورت

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

برای محاسبه این انتگرال تغییر متغیر $z = e^{i\theta}$ داده می‌یابیم

$$d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz} \quad \text{یا} \quad ie^{i\theta} d\theta = dz$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2z} (z^2 + 1)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2iz} (z^2 - 1)$$

بنابراین

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} f \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{z}$$

از اینرو انتگرال حقیقی مزبور به یک انتگرال مختلط تبدیل می‌شود که با محاسبه آن به روش مانده‌ها مقدار انتگرال حقیقی محاسبه می‌گردد.

مثال ۱. مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}} = -\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1}$$

تابع انتگران دارای دو قطب ساده $z = \sqrt{2} \pm 1$ است که تنها قطب $z = \sqrt{2} - 1$ در داخل دایره یکه است. بنابراین

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta} = -2\pi i \times \frac{1}{i} \operatorname{Res}_{z=\sqrt{2}-1} \frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} = -\frac{1}{2} (-2\pi) = \pi$$

مثال ۲. انتگرال $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$ را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{iz} dz}{3 - (z + \frac{1}{z}) + \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})} =$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{2dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

تابع انتگران دارای دو قطب ساده $z_1 = \frac{1}{5}(2-i)$ و $z_2 = 2-i$ است که تنها $z_1 = \frac{1}{5}(2-i)$ در داخل دایره یکه است. بنابراین

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow \frac{1}{5}(2-i)} (z - \frac{1}{5}(2-i)) \left(\frac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \right)$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow \frac{1}{5}(2-i)} \frac{1}{(1-2i)z + 6i} = 2\pi i \times \frac{1}{2i} = \pi$$

۲. محاسبه انتگرالهای توسمی به یکی از صورتهای

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax \, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax \, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

که در آن $f(x)$ به صورت یک تابع کسری از نسبت دو چند جمله‌ای است درجه مخرج لااقل دو واحد بیشتر از درجه صورت است و مخرج دارای ریشه حقیقی نیست. برای محاسبه هریک از انتگرالهای فوق مثلاً $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax \, dx$ کافی است به محاسبه انتگرال

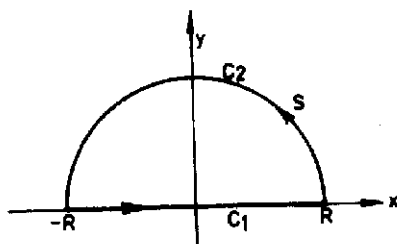
برداریم. قسمت حقیقی این انتگرال برابر انتگرال کسینوسی و

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$$

قسمت موهومی آن برابر انتگرال سینوسی است و انتگرال اول به ازای $\alpha=0$ حاصل می شود.

برای محاسبه انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$ از تابع $f(z)e^{iaz}$ بر روی مسیر زیر

انتگرال می گیریم و سپس شعاع نیم دایره را به سمت بینهایت میل می دهیم.



داریم

$$\int_c f(z)e^{iaz} dz = \int_{c_1} f(z)e^{iaz} dz + \int_{c_2} f(z)e^{iaz} dz$$

نظر به اینکه بر مرز c_1 , $z=x$ می یابیم

$$\int_c f(z)e^{iaz} dz = \int_{-R}^R f(x)e^{iax} dx + \int_{c_2} f(z)e^{iaz} dz$$

نظر به اینکه درجه مخرج تابع $f(z)$ لااقل دو واحد بیشتر از درجه صورت است عدد ثابتی مثل M می توان یافت به طوری که .

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^2}$$

در نتیجه می توان نوشت.

$$\left| \int_{c_r} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{M}{R^\gamma} \times \pi R = \frac{\pi M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int^R f(x) e^{iax} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_c f(x) e^{iax} dx \\ &= \gamma \pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} \text{Res } f(z) e^{iaz} \end{aligned}$$

از اینرو

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = \gamma \pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} \text{Res } f(z) e^{iaz}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx = \text{Re} \left\{ \gamma \pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} \text{Res } f(z) e^{iaz} \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax dx = \text{Im} \left\{ \gamma \pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} \text{Res } f(z) e^{iaz} \right\}$$

همینطور می توان ثابت کرد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \gamma \pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} \text{Res } f(z)$$

مثال ۳. مطلوب است محاسبه انتگرال: $\int_0^{\infty} \frac{1+x^\gamma}{1+x^\tau} dx$

داریم

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^\gamma}{1+x^\tau} dx = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^\gamma}{1+x^\tau} dx = \frac{1}{\tau} \times \gamma \pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} \text{Res } \frac{1+z^\gamma}{1+z^\tau}$$

معادله $1+z^2=0$ دارای دو جواب $z_1=e^{\frac{i\pi}{2}}$, $z_2=e^{\frac{3\pi}{2}}$ در نیم صفحه فوقانی است:

بنابراین

$$\sum_{z=z_1, z_2} \text{Res} \frac{1+z^2}{1+z^2} = \frac{1+z^2}{2z^2} \Big|_{z=z_1} + \frac{1+z^2}{2z^2} \Big|_{z=z_2}$$

$$= \frac{1+e^{i\pi}}{2e^{i\pi/2}} + \frac{1+e^{i3\pi}}{2e^{i3\pi/2}} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}(i-1)} + \frac{1-i}{2\sqrt{2}(i+1)} = -i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^2} dx = \pi i \times \frac{-\sqrt{2}}{2} i = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

مثال ۴. انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+1)^2}$ را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \sum_{\text{در نیم صفحه فوقانی}} \text{Res} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$$

در نیم صفحه فوقانی تنها قطب مرتبه دوم $z=i$ را داریم. بنابراین

$$\text{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2 e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} =$$

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{ie^{iz}(z+i)^{-2} - 2(z+i)^{-3}e^{iz}}{(z+i)^4} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}(iz-3)}{(z+i)^3} = -\frac{i}{2e}$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \times \frac{-i}{2e} = \frac{\pi}{e}$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

۳. محاسبه برخی انتگرالهای خاص

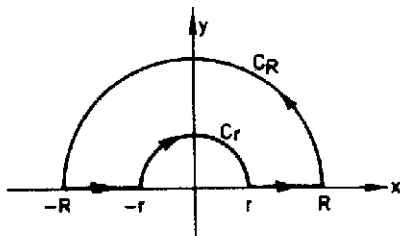
در این قسمت با ارائه چند مثال به محاسبه برخی از انتگرالهای خاص و جالب حقیقی می‌پردازیم. محاسبه این انتگرالها به کمک انتگرالگیری از توابع مختلط صورت می‌پذیرد.

مثال ۵. مطلوب است محاسبه انتگرال: $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Ln} x}{(x^2+1)^2} dx$

برای محاسبه این انتگرال از تابع $f(z) = \frac{\operatorname{Ln} z}{(z^2+1)^2}$ بر روی مسیر بسته C به صورت زیر انتگرال می‌گیریم و سپس R را به بینهایت و r را به صفر میل می‌دهیم.

$$\int_C f(z) dz = \int_{-R}^{-r} f(z) dz + \int_r^R f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C_r} f(z) dz$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \left[\frac{d}{dz} \frac{\operatorname{Ln} z}{(z+i)^2} \right] \Big|_{z=i} = 2\pi i \left(\frac{\pi + \gamma i}{8} \right) = -\frac{\pi}{2} + i \frac{\pi^2}{4}$$



باتوجه به اینکه $0 \leq \theta \leq \pi$ بر روی نیم دایره بزرگتر C_R می‌توان نوشت

$$|\operatorname{Ln} z| = \sqrt{\operatorname{Ln}^2 R + \theta^2} \leq 2 \operatorname{Ln} R$$

در نتیجه

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \left[\frac{\operatorname{Ln} R}{(R^2-1)^2} \pi R \right] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

همینطور بر روی نیم دایره کوچکتر C_r داریم $|\operatorname{Ln} z| < 2 \operatorname{Ln} \frac{1}{r}$ و در نتیجه

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \left[\frac{2 \operatorname{Ln} \frac{1}{r}}{(1-r^2)^2} \pi r \right] \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

از طرفی

$$\int_{-R}^{-r} f(z) dz = \int_{-R}^{-r} f(x) dx = \int_r^R \frac{\text{Lnx}}{(1+x^2)^{\gamma}} dx + i\pi \int_r^R \frac{dx}{(1+x^2)^{\gamma}}$$

در نتیجه

$$\int_C f(z) dz = \gamma \int_r^R \frac{\text{Lnx}}{(1+x^2)^{\gamma}} dx + i\pi \int_r^R \frac{dx}{(1+x^2)^{\gamma}} = -\frac{\pi}{\gamma} + i \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma}$$

و از آنجا داریم

$$\gamma \int_0^{\infty} \frac{\text{Lnx}}{(1+x^2)^{\gamma}} dx + i\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\gamma}} = -\frac{\pi}{\gamma} + i \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma}$$

ولی

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\gamma}} = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\gamma}} = \frac{1}{\gamma} \gamma \pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^{\gamma}}$$

$$= \pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [(z-i)^{\gamma} \frac{1}{(z^2+1)^{\gamma}}] = \pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z+i)^{\gamma}} \right) = \pi i \frac{1}{\gamma i} = \frac{\pi}{\gamma}$$

در نتیجه

$$\gamma \int_0^{\infty} \frac{\text{Lnx}}{(1+x^2)^{\gamma}} dx + \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma} = -\frac{\pi}{\gamma} + i \frac{\pi^{\gamma}}{\gamma}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Lnx}}{(1+x^2)^{\gamma}} dx = -\frac{\pi}{\gamma}$$

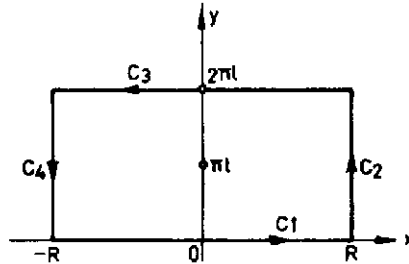
مثال ۶. انتگرال $0 < \lambda < 1$ را محاسبه کنید. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} dx$

از تابع $f(z) = \frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}$ بر روی مسیر زیر انتگرال گرفته و R را به سمت بی نهایت میل

می‌دهیم هرگاه C مسیر مورد نظر باشد و $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz + \int_{c_3} f(z) dz + \int_{c_4} f(z) dz$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi} \frac{e^{\lambda z}}{1+e^z} = -2\pi i e^{\lambda \pi i}$$



ولی

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} dx$$

$$\int_{c_3} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{\lambda(x+i\pi)}}{1+e^{x+i\pi}} dx = -e^{i\lambda\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} dx$$

از طرفی بر روی مسیرهای C_2 و C_4 به ترتیب داریم.

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{\lambda(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| \leq \frac{e^{\lambda R}}{e^{R-1}} = \frac{e^{(\lambda-1)R}}{1-e^{-R}}$$

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{\lambda(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} \right| \leq \frac{e^{-\lambda R}}{1-e^{-R}}$$

$$\left| \int_{c_2} f(z) dz \right| \leq 2\pi \left(\frac{e^{-\lambda R}}{1-e^{-R}} \right) \rightarrow 0 \quad \text{و}$$

$$\left| \int_{c_4} f(z) dz \right| \leq 2\pi \left(\frac{e^{(\lambda-1)R}}{1-e^{-R}} \right) \rightarrow 0$$

در نتیجه

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = (-e^{i\lambda\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} dx = -2\pi i e^{\lambda \pi i}$$

بنابراین

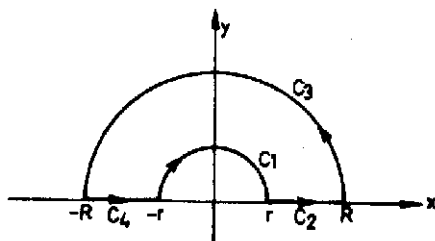
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} dx = \frac{-\gamma\pi i e^{\lambda\pi i}}{1-e^{\gamma\lambda\pi i}} = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi} \quad ; 0 < \lambda < 1$$

مثال ۷. انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ را محاسبه کنید.

از تابع $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ بر روی مسیر زیر انتگرال می‌گیریم و فرض می‌کنیم $R \rightarrow \infty$ و $r \rightarrow 0$ هرگاه C مسیر مورد نظر بوده و $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ آنگاه

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz + \int_{C_4} f(z) dz$$

$$= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0, (1)$$



بر روی نیمدایره C_2 به جهت تحلیلی بودن $\frac{e^{iz}}{z}$ می‌توان به طریق جزء به جزء انتگرالگیری نمود و نتیجه گرفت

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \frac{1}{i} \int_{C_2} \frac{d(e^{iz})}{z} = \frac{e^{iz}}{iz} \Big|_{-R}^R + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{iz^2} dz = \frac{e^{iR} + e^{-iR}}{iR} + \frac{1}{i} \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z^2} dz$$

بر روی نیمدایره C_3 داریم $|e^{iz}| \leq 1$ و از آنجا نتیجه می‌گیریم

$$\left| \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \left| \frac{e^{iR} + e^{-iR}}{iR} \right| + \left| \frac{1}{i} \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z^2} dz \right| \leq \left(\frac{\gamma}{R} + \frac{\pi R}{R^2} \right) \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$$

در نتیجه $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. بر روی نیم دایره C_1 داریم

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_1} \frac{dz}{z} + \int_{C_1} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = -\pi i + \int_{C_1} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz$$

$z=0$ برای تابع $\frac{e^{iz} - 1}{z}$ از نوع تکین برداشتنی است و تابع $\frac{e^{iz} - 1}{z}$ بجز در $z=0$ تحلیلی و در نتیجه کراندار است یعنی عددی مثل M موجود است که

$$\left| \frac{e^{iz} - 1}{z} \right| \leq M$$

از اینرو

$$\left| \int_{C_1} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz \right| \leq (M \times \pi r) \rightarrow 0 \quad r \rightarrow 0$$

هم اکنون اگر در (۱) فرض کنیم $r \rightarrow 0$ و $R \rightarrow \infty$ آنگاه می‌یابیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi i = 0$$

و از آنجا $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$ و در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

مثال ۸. انتگرالهای $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx$ را که به انتگرالهای فرنل

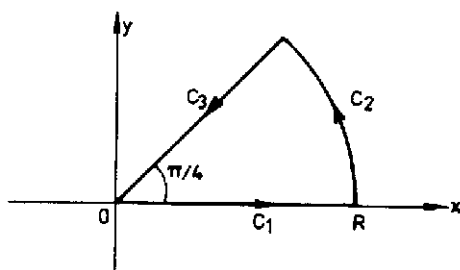
موسوم‌اند محاسبه کنید

از تابع $f(z) = e^{iz^2}$ بر روی مسیر زیر انتگرال می‌گیریم و سپس R را به سمت بی‌نهایت می‌دهیم هرگاه $c = c_1 + c_2 + c_3$ آنگاه

$$\oint_c f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz + \int_{c_3} f(z) dz = 0 \quad (1)$$

بر روی مسیر c_2 $z = r\sqrt{i}$ داریم

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_2} e^{iz^2} dz = \sqrt{i} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{i}}{2} \sqrt{\pi}$$



بر c_2 بر روش جزء به جزء انتگرال می‌گیریم و می‌یابیم

$$\int_{c_2} e^{iz^2} dz = \int_{c_2} \frac{d(e^{iz^2})}{2iz} = \frac{e^{iz^2}}{2iz} \Big|_R^{\sqrt{i}R} + \frac{1}{2i} \int_{c_2} \frac{e^{iz^2}}{z^2} dz$$

$$\left| \frac{e^{-R^2}}{2i\sqrt{i}R} - \frac{e^{-iR^2}}{2iR} \right| \leq \left(\frac{e^{-R^2}}{2R} + \frac{1}{2R} \right) \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$$

و از طرفی

$$\left| \frac{e^{iz^2}}{z^2} \right| = \left| \frac{e^{iR^2(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2} \right| = \frac{e^{-R^2\sin\theta}}{R^2}$$

نظر به اینکه $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ و $\sin \varphi \geq 0$ و $e^{-R^2 \sin^2 \varphi} \leq 1$ و بنابراین $\left| \frac{e^{iz^2}}{z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2}$ و در نتیجه

$$\left| \int_{C_r} \frac{e^{iz^2}}{z^2} dz \right| \leq \frac{1}{R^2} \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi}{2R} \rightarrow 0$$

بنابراین

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_r} e^{iz^2} dz = 0$$

حال اگر در (۱) فرض کنیم $R \rightarrow \infty$ آنگاه می‌یابیم

$$\int_0^{\infty} e^{-ix^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_r} e^{iz^2} dz - \sqrt{i} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = 0$$

و با توجه به نتایج فوق داریم

$$\int_0^{\infty} e^{-ix^2} dx = \sqrt{i} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{i} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ولی

$$\int_0^{\infty} e^{-ix^2} dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

بنابراین

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

۶.۴. مسائل حل شده

۱. مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z|=1} \frac{(z+4)^2}{z^2 + 5z^2 + 6z^2} dz$$

تابع انتگرال تنها یک قطب مرتبه دوم $z=0$ در داخل دایره $|z|=1$ دارد. در نتیجه

$$\int_{|z|=1} \frac{(z+4)^r}{z^r + 5z^r + 6z^r} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{(z+4)^r}{z^r + 5z^r + 6z^r} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[\left(\frac{(z+4)^r}{z^r(z^r + 5z^r + 6z^r)} \right)' \right]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \left(\frac{(z+4)^r}{z^r + 5z^r + 6z^r} \right)' = -\frac{1}{9} \times 2\pi i = -\frac{16\pi i}{9}$$

۲. مطلوب است محاسبه

$$\int_{|z|=1} \frac{\cot z}{z} dz$$

تابع $\frac{\cot z}{z}$ دارای قطب مرتبه دوم در $z=0$ است. بنابراین

$$\int_{|z|=1} \frac{\cot z}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cot z}{z} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^2 \frac{\cos z}{z \sin z} \right)' = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)' = 0$$

۳. انتگرال $\int_{|z|=1} \frac{1}{e^z - 1} dz$ را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{e^z - 1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{e^z - 1} = 2\pi i \frac{1}{(e^z - 1)'} \Big|_{z=0} = 2\pi i \frac{1}{e^z} \Big|_{z=0} = 2\pi i$$

۴. $\int_c \frac{dz}{\sqrt{z}}$ را بر روی نیمدایره مثلثاتی واقع در نیم صفحه فوقانی و در جهت مثلثاتی

محاسبه کنید.

$$dz = ie^{i\theta} d\theta, \quad \sqrt{z} = e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad z = e^{i\theta}$$

$$\int_c \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi e^{-i\frac{\theta}{2}} ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{i\frac{\theta}{2}} d\theta = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \Big|_0^\pi = 2(i-1)$$

۵. مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \sum \text{Res} \frac{1}{1+z^2}$$

در نیم صفحه فوقانی

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

در

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{\rho} e^{-\frac{5\pi}{6}i} + \frac{1}{\rho} e^{-\frac{5\pi}{2}i} + \frac{1}{\rho} e^{-\frac{10\pi}{6}i} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

۶. انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2} dx$ را محاسبه کنید.

به محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)^2} dx$ می پردازیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)^2} dx = 2\pi i \text{Res}_{z=2i} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2i} \left[(z-2i)^2 \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2} \right]'$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2} \right)' = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2ie^{iz}(z+2i)^2 - 2(z+2i)e^{iz}}{(z+2i)^4} = \frac{5\pi}{16e^{-2}}$$

۷. نشان دهید که

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{1-2a \cos \theta + a^2} = \frac{2\pi a^2}{1-a^2}; \quad a^2 < 1$$

با فرض $z = e^{i\theta}$ داریم

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right), \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

بنابراین

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \gamma \theta d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{(z^\gamma + 1) dz}{z^\gamma (z - az^{-1} - a + a^1 z)} = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{(z^\gamma + 1)}{z^\gamma (z - a)(1 - az)} dz$$

تنها قطبهای $z=0$ و $z=a$ در داخل دایره یکه هستند. از اینرو

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \gamma \theta d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = 2\pi i \sum_{z=0, a} \text{Res} \frac{z^\gamma + 1}{z^\gamma (z - a)(1 - az)} = \pi \left[\lim_{z \rightarrow a} \frac{z^\gamma + 1}{z^\gamma (1 - az)} \right.$$

$$\left. + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^\gamma + 1}{z - az^{-1} - a + a^1 z} \right) \right] = \pi \left[\frac{a^\gamma + 1}{a^\gamma (1 - a^{\gamma+1})} - \frac{a^\gamma + 1}{a^\gamma} \right] = \frac{2\pi a^\gamma}{1 - a^{\gamma+1}}$$

۸. نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^\gamma dx}{(x^\gamma + 1)(x^\gamma + 4)} = \frac{\pi}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^\gamma dx}{(x^\gamma + 1)(x^\gamma + 4)} = 2\pi i \sum_{z=i, ii} \text{Res} \frac{z^\gamma}{(z^\gamma + 1)(z^\gamma + 4)} = 2\pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$$

۹. مطلوب است محاسبه

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_0)^n}$$

با فرض $z - z_0 = e^{i\theta}$ می‌یابیم $dz = ie^{i\theta} d\theta$ و از آنجا

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = i \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta} d\theta = \begin{cases} 0; & n \neq 1 \\ 2\pi i; & n = 1 \end{cases}$$

۷.۴. تمرینات

۱. مطلوب است محاسبه $\int_c f(z) dz$ که در آن

$z = 1 + i$ تا $z = 0$ یا $y = x^2$ سهمی c , $f(z) = \operatorname{Re} z$ (a)

c دایره واحد $f(z) = |z|^2$ (b)

$f(z) = \cos z$ روی خط راست از $1-i$ تا $1+i$ (c)

$f(z) = \operatorname{Im}(z^2)$ از صفر تا $2+2i$ در طول یک پاره خط (d)

۲. هرگاه $|f(z)| \leq M$ و منحنی c به طول L باشد آنگاه $|\int_c f(z) dz| \leq ML$

۳. فرض کنید c قوسی از دایره $|z| = 2$ از $z = 2$ تا $z = 2i$ باشد که در ربع اول است آنگاه

بدون آنکه انتگرال بگیرید نشان دهید که

$$\left| \int_c \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

۴. هرگاه c دایره $|z| = R > 1$ باشد آنگاه نشان دهید که

$$\left| \oint_c \frac{\operatorname{Ln} z}{z^2} dz \right| < 2\pi \frac{\pi + \operatorname{Ln} R}{R}$$

و اگر $R \rightarrow \infty$ آنگاه $\oint_c \frac{\operatorname{Ln} z}{z^2} dz$ به سمت صفر میل می‌کند.

۱۲. مطلوب است محاسبه $\oint_C f(z) dz$ که در آن

$$(a) f(z) = \frac{z \sin z}{z^2 - z} \text{ و } C \text{ مرز مستطیلی بارنوس } \frac{1}{4} \pm i \text{ و } -\frac{1}{4} \pm i$$

$$(b) f(z) = \frac{\tan z}{z - i} \text{ و } C \text{ مرز لوزی بارنوس } -1 \text{ و } 1 \text{ و } 2i \text{ و } -2i \text{ است.}$$

$$(c) f(z) = \frac{e^z + i}{ze^z - \gamma iz} \text{ و } C \text{ مرز مربعی بارنوس } 1 \pm i \text{ و } \pm i \text{ است.}$$

$$(d) f(z) = \frac{\operatorname{Ln}(z+1)}{z^2 + 1} \text{ که در آن } C \text{ مرز مثلثی بارنوس } 1 - \frac{1}{4}i \text{ و } 1 + \frac{1}{4}i \text{ و } -2i \text{ است.}$$

$$(e) f(z) = \frac{\operatorname{Ln}(z-1)}{z-5} \text{ که در آن } C \text{ دایره } |z-4|=2 \text{ است.}$$

۱۳. نشان دهید که

$$(a) \frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) (z+1)^n ; |z+1| < 1$$

$$(b) \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{4}\right)^n ; |z-2| < 2$$

(c) هرگاه $0 < |z| < 4$. آنگاه ثابت کنید.

$$\frac{1}{4z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$$

۱۴. سری تیلور هر یک از توابع زیر را در حول نقاط داده شده به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} b) f(z) = \sin hz ; z = \pi i & a) f(z) = \cos z ; z = \frac{\pi}{4} \\ d) f(z) = (z+1)^2 ; z = \pi i & c) f(z) = z^0 ; z = -1 \\ f) f(z) = Lnz ; z = 1 & e) f(z) = \sin z^2 ; z = 0 \end{array}$$

۱۵. سه جمله اول از سری مکلورن هر یک از توابع زیر بیابید.

$$c) f(z) = z \sin z^2 \qquad b) f(z) = z \cot z \qquad a) f(z) = e^z \sin z$$

۱۶. هر یک از توابع زیر را در حول مبدأ مختصات به صورت سری لوران بسط دهید

$$\begin{array}{lll} c) \frac{\sin h\pi z}{z^2} & b) z \cos \frac{1}{z} & a) \frac{e^{1/z}}{z^2} \\ f) z^2 \cos h \frac{1}{z} & e) \frac{z-1}{z^2-z^2} & d) \frac{1}{z^2+z^2} \end{array}$$

۱۷. بسط لوران هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} b) \frac{1}{z^2+1} ; z_0 = i & a) \frac{e^z}{(z-1)^2} ; z_0 = 1 \\ d) \frac{\sin z}{(z-1/4)^2} ; z_0 = \frac{\pi}{4} & c) \frac{z+1+i}{(z+i)^2} ; z_0 = -i \end{array}$$

۱۸. با مشتقگیری از سری مکلورن $\frac{1}{1-z}$ نشان دهید که

$$b) \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} \qquad a) \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

۱۹. با انتگرالگیری از سری مکلورن $\frac{1}{1+s}$ در امتداد مرزی از $s=0$ تا $s=z$ در داخل دایره

همگرایی نشان دهید که

$$\operatorname{Ln}(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}; |z| < 1$$

۲۰. ثابت کنید هرگاه $f(0) = 1$ و به ازای $z \neq 0$, $f(z) = z^{-1} \operatorname{Ln}(z+1)$ آنگاه f در سراسر حوزه $|z| < 1$ تحلیلی است.

۲۱. ثابت کنید که اگر f در z_0 تحلیلی باشد و $f^{(m)}(z_0) = \dots = f'(z_0) = f(z_0) = 0$ آنگاه تابع

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z-z_0)^{m+1}} f(z); & z \neq z_0 \\ \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(z_0); & z = z_0 \end{cases}$$

در z_0 تحلیلی است.

۲۲. مطلوب است محاسبه مانده هر یک از توابع زیر در نقاط تکین آنها

a) $\frac{1}{1-e^z}$

b) $\frac{z}{z^2-1}$

c) $\frac{6-4z}{z^2+3z^2}$

d) $\frac{1}{(z^2-1)^2}$

e) $\frac{z+2}{(z+1)(z^2+16)}$

f) $\frac{-z^2-22z+8}{z^2-5z^2+4z}$

۲۳. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرالهای زیر

c) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^2} dz$

b) $\oint_{|z|=1} \tan z dz$

a) $\oint_{|z|=1} z \cot z dz$

e) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+5z^2+6z^2} dz$

d) $\int_{|z|=1} \frac{z+1}{z^2-2z^2} dz$

g) $\int_{|z|=1} \frac{z^2-3z^2+1}{(2z+1)(z^2+4)} dz$

f) $\int_{|z|=1} \frac{6z^2-4z+1}{(z-2)(1+4z^2)} dz$

$$i) \int_{|z|=1} \frac{\cos hz}{z^2 - 3iz} dz$$

$$h) \int_{|z|=1} \frac{e^{(z-i)\pi/4}}{\sin z} dz$$

$$k) \int_{|z|=1} \frac{\cos hz}{z(z^2+1)} dz$$

$$j) \int_{|z|=1} \frac{3 \cdot z^2 - 23z + 5}{(2z-1)^2(2z-1)} dz$$

$$m) \int_{|z|=2} \frac{-z^2 - 22z + 8}{z^2 - 5z^2 + 2z} dz$$

$$l) \int_{|z|=1} \frac{e^{z^2} \cos hz}{\cos \frac{z}{2}} dz$$

۲۴. مطلوب است محاسبه هریک از انتگرالهای زیر

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1 + 4 \cos x} dx$$

$$b) \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1}{3} \cos \theta}$$

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$$

$$f) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 2 \cos 2\theta} d\theta$$

$$e) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{3 + \cos \theta} d\theta$$

$$d) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{13 - 12 \cos 2\theta} d\theta$$

$$j) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{2 + \frac{1}{3} \sin 2\theta} d\theta$$

$$h) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\theta}{5 - 2 \cos 2\theta} d\theta$$

$$g) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{26 - 10 \cos 2\theta} d\theta$$

۲۵. نشان دهید که

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}; \quad -1 < a < 1$$

$$a) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \pi \sqrt{2}$$

$$c) \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}; \quad a > 1$$

$$d) \int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \pi; \quad n = 1, 2, \dots$$

۲۶. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرالهای زیر

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$$

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^2} dx$$

$$e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$$

$$h) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x+a)^2+b^2} dx$$

$$g) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

$$j) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+13x^2+36} dx$$

$$i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+9)^2} dx$$

$$l) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x^2+13x^2+9} dx$$

$$k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$$

$$n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+1} dx$$

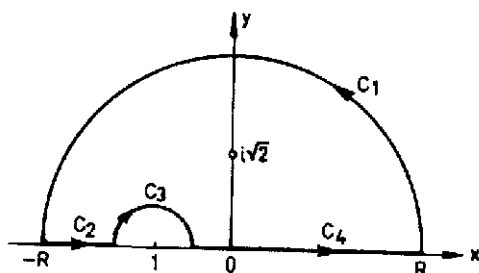
$$m) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

۲۷. با انتگرالگیری از e^{-z^2} بر روی کرانه مستطیلی بارنوس $b, -b$; $R+ib$ و $-R+ib$ - و فرض

$$R \rightarrow \infty \text{ و استفاده از } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ نشان دهید که}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

۲۸. مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$ را با انتگرالگیری بر روی مرز زیر محاسبه کنید.



۲۹. نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Ln} x}{1+x^2} dx = 0.$$

۸.۴ مسائل متفرقه

۱. ثابت کنید

$$a) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$b) |1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

$$c) |z_1 + z_2| \geq \frac{1}{2} (|z_1| + |z_2|) \left| \frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|} \right|$$

$$d) |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 + z_2|^2 \leq 2 \frac{|a_1 z_1 + a_2 z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2$$

که در آن a_1 و a_2 اعداد حقیقی و $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

۲. هرگاه $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ و $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ آنگاه نقاط z_1 و z_2 و z_3

رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع محاط در یک دایره یکه هستند.

۳. هرگاه $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ و $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ آنگاه z_1, z_2, z_3, z_4

و z_4 رئوس یک مستطیل بوده و یا باهم برابرند.

۴. ثابت کنید که

۱۴. ثابت کنید که تابع $f(z) = 2\sqrt{xy}$ در شرایط کشی-ریمن در مبدأ مختصات صدق می‌کند ولی در این نقطه مشتقپذیر نیست.

۱۵. هرگاه $w=f(z)$ ، $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ موجود باشد آنگاه مشتقات جزئی u_y و v_x موجودند و $u_y = -v_x$.

۱۶. هرگاه u و v در تابع $w=f(z)=u+iv$ و مشتقپذیر باشند و $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta f}{\Delta z} \right|$ موجود باشد آنگاه $f(z)$ یا $\bar{f}(z)$ در نقطه z مشتقپذیر است.

۱۷. هرگاه u و v در $w=f(z)=u+iv$ مشتقپذیر بوده و $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z}$ موجود باشد

آنگاه تابع $f(z)$ در نقطه z مشتقپذیر است.

۱۸. نشان دهید که معادله لاپلاس را به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ نیز می‌توان نوشت.

۱۹. آیا همساز بودن u دلیلی برای همساز بودن u^* است.

۲۰. هرگاه $f(z)$ تحلیلی باشد آنگاه کدامیک از توابع $|f(z)|$ ، $f(z)$ ، $\arg f(z)$ ، $\operatorname{Ln} |f(z)|$ و $z^* f(z)$ و $\sqrt{f(z)}$ تحلیلی و کدامیک غیر تحلیلی هستند.

۲۱. در هر یک از مسائل زیر تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را طوری بیابید که

a) $u=e^x (x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \sin hy + x^2 - 3xy^2 + y$

b) $v = \operatorname{Ln} (x^2 + y^2) + x - 2y$

۲۲. نقش هر یک از منحنیهای زیر را با نگاهیست $w = \frac{1}{z}$ بیابید

$y=x^2$ (d) $y=x+b$ (c) $x^2+y^2=by$ (b) $x^2+y^2=ax$ (a)

۲۳. در هر یک از مسائل زیر:

(a) نقش ناحیه $x > 0$ ، $y > 0$ را با تبدیل $w = \frac{z-i}{z+i}$ بیابید.

(b) نقش ناحیه $|z| < 1$ و $\operatorname{Im} z > 0$ را با تبدیل $w = \frac{2z-i}{2+iz}$ بیابید.

(c) نقش ناحیه $0 < \phi < \frac{\pi}{4}$ را با تبدیل $w = \frac{z}{z-1}$ بیابید.

۲۴. تبدیل مویبوسی بیابید که :

(a) نیم صفحه فوقانی را به روی خودش بنگارد.

(b) نیم صفحه فوقانی را به روی نیم صفحه تحتانی بنگارد.

(c) نیم صفحه فوقانی را به روی نیم صفحه طرف راست بنگارد.

۲۵. نشان دهید که نگاشت $w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ نیم صفحه فوقانی را به قوی خارج دایره واحد می‌نگارد.

۲۶. نشان دهید که نگاشت $w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ با فرض $|z_0| < 1$ قرص واحد را به روی خودش می‌نگارد.

۲۷. یک تبدیل دو خطی با نقطه ثابت z_0 را سهموی می‌نامند. نشان دهید که یک تبدیل سهموی را می‌توان به صورت

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h ; z_0 \neq \infty$$

یا $w = z + h ; z_0 = \infty$ نوشت.

۲۸. دایری را بیابید که تحت تبدیل سهموی $\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h$ به خودش تبدیل می‌شوند.

۲۹. نقش هریک از خطوط $y = x + 2$, $y = x$, $y = kx + b$ را با تبدیل $w = e^z$ به دست آورید.

۳۰. نقش هریک از نواحی زیر را با نگاشت $w = \arcsin z$ بیابید:

(a) نیم صفحه فوقانی

(b) صفحه z که در طول $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ واقع بر محور x بریده شده باشد.

(c) ربع اول

۳۱. نقش هریک از نواحی زیر را با تبدیلات داده شده بیابید:

(a) خطوط $x = c$ و $y = c$ با $w = \cos z$ و $w = \cos hz$

$$w = \cos z \text{ با } y > 0 \text{ و } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \quad (b)$$

$$w = \cos hz \text{ با } x > 0, 0 < y < \pi \quad (c)$$

$$w = \tan z \text{ با } y > 0 \text{ و } 0 < x < \pi \quad (d)$$

$$w = \cot hz \text{ با } 0 < y < \pi \quad (e)$$

۳۲. مطلوب است محاسبه $\int_C |z| dz$ که در آن

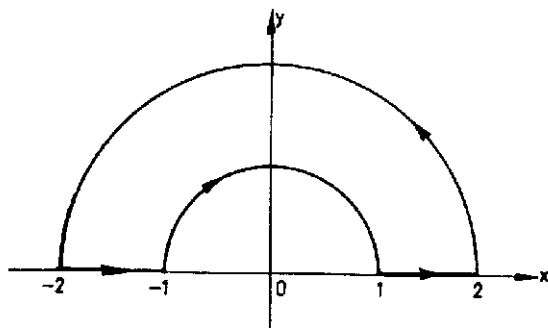
(a) C پاره خطی از مبدأ مختصات تا نقطه $z = -i$

(b) C در طول نیمدایره $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$, با شروع از نقطه $z = -i$

۳۳. مطلوب است محاسبه $\oint_C |z| \bar{z} dz$ که در آن C منحنی بسته شامل نیمدایره $|z| = 1$

$y > 0$ و $-1 \leq x \leq 1$ است.

۳۴. انتگرال $\oint_C \frac{z}{\bar{z}} dz$ را بر روی مسیر زیر محاسبه کنید.



۳۵. انتگرال $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ را در طول هر یک از مسیرهای زیر محاسبه کنید:

(a) در طول نیمدایره $|z| = 1$ و $y \geq 0$

(b) در طول دایره $|z|=1$

۳۶. مطلوب است محاسبه $\int_C \operatorname{Ln} z \, dz$ را در طول هر یک از مسیرهای زیر

(a) در طول دایره واحد

(b) در طول دایره $|z|=R$ و با فرض $\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} R + 2\pi i$

۳۷. مطلوب است محاسبه $\int_{|z|=1} z^n \operatorname{Ln} z \, dz$ که در آن n عددی است صحیح.

۳۸. انتگرال $\int_{|z|=1} z^c \, dz$ را که در آن c عددی است مختلط محاسبه کنید.

۳۹. ثابت کنید که به ازای $|a| \neq R$

$$\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a| |z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}$$

۴۰. هرگاه $f(z)$ در یک همسایگی از مبدأ مختصات پیوسته باشد آنگاه

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\phi}) \, d\phi = 2\pi f(0)$$

۴۱. نشان دهید که اگر f در درون و روی مرز ساده بسته C تحلیل باشد و z_0 واقع بر C نباشد

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0} \, dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \, dz$$

آنگاه

۴۲. مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z-a|=a} \frac{z \, dz}{z^2-1}; a > 1$$

۴۳. مطلوب است محاسبه $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{ze^z \, dz}{(z-a)^2}$ در صورتی که نقطه a واقع در داخل

منحنی بسته C باشد.

۴۴. تابع $f(z)$ در یک ناحیه کراندار که به وسیله مرز بسته ساده C محصور شده است و مبدأ

مختصات یک نقطه داخلی آن است تحلیلی می باشد. ثابت کنید که به ازای هر شاخه از $\operatorname{Ln} z$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f'(z) \ln z \, dz = f(z_0) - f(0)$$

که در آن z_0 نقطه شروع انتگرالگیری است.

۴۵. مطلوب است محاسبه انتگرال $\oint_C z^2 \ln \frac{z+1}{z-1} \, dz$ در صورتی که

(a) C دایره $|z|=2$ است.

(b) C دایره $|z-1|=1$ بوده و نقطه شروع انتگرالگیری $z_0=1+i$ باشد.

۴۶. ثابت کنید که اگر یک تابع تحلیلی غیر ثابت $f(z) \neq c$ در ناحیه D تحلیلی بوده و صفر

نباشد آنگاه $|f(z)|$ مینیمم مقدار خود را در داخل D نمی تواند اختیار کند.

۴۷. هرگاه $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی بوده و $f(0)=0$ و $|f(z)| \leq 1$ آنگاه بر سراسر ناحیه

$|f(z)| \leq |z|$. این نتیجه به لم شوآرتز نیز موسوم است.

همچنین ثابت کنید که اگر به ازای یک نقطه داخلی $|f(z)| = |z|$ آنگاه $f(z) = e^{iaz}$ که در

آن a عددی حقیقی است.

راهنمایی. تابع $\frac{f(z)}{z}$ را مورد بررسی قرار دهید و اصل مدویل ماکزیمم را به کار برید.

۴۸. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرالهای زیر

b) $\int_{|z|=1} \sin^2 \frac{1}{z} \, dz$

a) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^2-1)}$

d) $\int_{|z|=2} (1+z+z^2) \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz$

c) $\int_{|z|=1} z^n e^z \, dz$

f) $\int_{|z|=r \neq 1} \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$

e) $\int_{|z|=0} \frac{dz}{(1-\cos z)\sin z}$

g) $\int_C \frac{dz}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}} ; cy^x = x$

۴۹. مطلوب است محاسبه هریک از انتگرالهای زیر

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \phi \, d\phi}{1 - 2a \cos \phi + a^2}; \quad a \neq \pm 1, \quad a \in \mathbb{C}$$

$$b) \int_0^{2\pi} e^{\cos \phi} \cos(n\phi - \sin \phi) \, d\phi; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$c) \int_0^{\pi} \tan(x+ia) \, dx; \quad a \in \mathbb{R}$$

$$d) \int_0^{2\pi} \cot(x+a) \, dx; \quad a \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im} a \neq 0$$

$$e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

$$f) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$g) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^2 - 2x + 1}$$

$$h) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} \, dx$$

$$k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{(x^2 + 4)(x-1)}$$

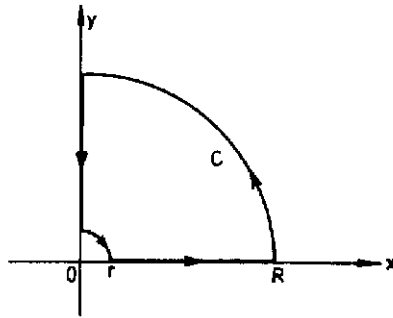
$$l) \int_0^{\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin ax}{x} \, dx$$

۵۰. با انتگرالگیری از تابع $z^{p-1} e^{-az}$ بر روی مسیر زیر به محاسبه انتگرالهای

$$a > 0, \quad 0 < p < 1, \quad \int_0^{\infty} x^{p-1} \cos ax \, dx$$

$$a > 0, \quad -1 < p < 1, \quad \int_0^{\infty} x^{p-1} \sin ax \, dx$$

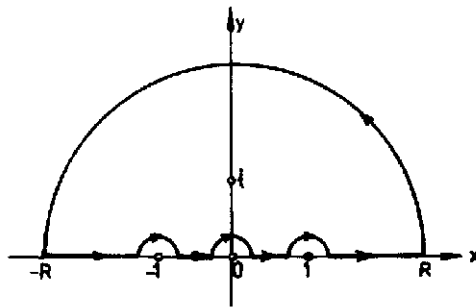
بپردازید.



۵۱. با محاسبه $\int_C \ln\left(\frac{1}{z} - z\right) \frac{dz}{1+z^2}$ بر روی مسیر زیر به محاسبه انتگرال

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x} - x\right) \frac{dx}{1+x^2}$$

بپردازید.



۵۲. ثابت کنید.

$$|z-1| \leq ||z|-1| + |z| \operatorname{arg} z \quad (a)$$

(b) هرگاه $|z| < \frac{1}{2}$ آنگاه $|(1+i)z^2 + iz| < \frac{3}{4}$

(c) هرگاه $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ آنگاه $\operatorname{arg} \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{1}{2} \operatorname{arg} \frac{z_2}{z_1}$

۵۳. ثابت کنید.

$$a) (\sqrt{3}-i)^n = r^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$$

$$b) (1+i)^n = r^{n/2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$c) (1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = r^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right)$$

۵۴. نشان دهید که تابع

$$u(x,y) = \begin{cases} x & ; |y| > |x| \\ -x & ; |y| \leq |x| \end{cases}$$

دارای مشتقات جزئی $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ در مبدأ مختصات بوده ولی در آن دارای مشتق پیوسته نیست.

۵۵. نشان دهید که تابع $f(z) = z \operatorname{Re} z$ تنها در $z=0$ دارای مشتق است و $f'(0)$ را بیابید.

۵۶. نقش ناحیه $\pi \leq y \leq -\pi$ را با تبدیل $w=z+e^z$ بیابید.

۵۷. نشان دهید

$$1^{\sqrt{2}} = \cos(2k\pi\sqrt{2}) + i \sin(2k\pi\sqrt{2})$$

۵۸. هرگاه تعریف کنیم $\log_a z = \frac{\ln z}{\ln a}$ آنگاه $\log_{1+i}(1+i)$ ، $\log_{1+i}(1-i)$ را بیابید.

۵۹. نشان دهید که

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} ; \quad 0 < a < 1$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2 + b^2} dx = \frac{\ln \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \operatorname{arc tan} \frac{b}{a}$$

۶۰. نشان دهید که معادلات کشی ریمان در مختصات قطبی به صورت زیر در می آیند.

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} , \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

۶۱. هرگاه $f(z)$ تابعی تحلیلی باشد آنگاه

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2$$

۶۲. نشان دهید که

$$a) \int_0^\pi \frac{\sin^n \theta d\theta}{a+b \cos \theta} = \frac{\pi}{b^n} \left[-a^n + \frac{2}{n} ab^n + (a^2 - b^2)^{n/2} \right]$$

$$b) \int_0^\pi \cos^n \theta d\theta = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \frac{\pi}{2} ; n \in N$$

۶۳. هر یک از مسائل زیر را حل کنید.

$$a) \nabla^2 u = x^2 - y^2 ; 0 < x < a , 0 < y < a$$

$$u_x(a, y) = 0 , u_x(0, y) = 0 , u_y(x, 0) = 0 , u_y(x, a) = 0$$

$$b) u_t = c^2 \nabla^2 u + xy \sin t ; 0 < x < \pi , 0 < y < \pi , t > 0$$

$$u_t(x, y, 0) = x + y$$

$$u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 , u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0$$

$$c) u_t - c^2 \nabla^2 u = 0 ; 0 < x < \pi , 0 < y < \pi , t > 0$$

$$u(x, y, 0) = 0 , u(0, y, t) = 0 , u(\pi, y, t) = 0$$

$$u(x, 0, t) = 2(x - \pi) \sin t , u(x, \pi, t) = 0$$

۶۴. مطلوب است حل مسئله بایهامورنیک زیر

$$\nabla^2 u = f(x, y) ; \nabla^2 u = \nabla^2 (\nabla^2 u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = u\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0 , u_{xx}\left(-\frac{a}{2}, y\right) = u_{xx}\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad u_{yy}(x, 0) = u_{yy}(x, b) = 0$$

۶۵. هریک از مسائل زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید.

$$a) \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma x \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma x; \quad u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = 1$$

$$b) x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = xt; \quad u(x, 0) = 0; \quad x > 0, \quad u(0, t) = 0; \quad t \geq 0$$

۶۶. هریک از مسائل زیر را به روش تفکیک متغیرها حل کنید.

$$a) u_t - u_{xx} + au = 0; \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = x(\pi - x); \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$b) u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = \sin^2 x, \quad u(0, y) = \sin y, \quad u(\pi, y) = 0$$

$$c) u_{xx} + u_{yy} + u_x = 0; \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \sin y$$

$$d) u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0; \quad r < 1, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u_\theta(r, \frac{1}{2}\pi) = 0, \quad u(1, \theta) = \theta$$

$$e) u_{tt} + \gamma u_t - c^2 u_{xx} = 0; \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x$$

$$f) u_{tt} + u_t - c^2 u_{xx} = \alpha x(1-x); \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \frac{1}{2} \pi x, \quad u_t(x, 0) = 0$$

$$g) u_{xx} + u_{yy} = \sin x - \sin^2 x; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < 2$$

$$u(0, y) = 0, \quad u_x(\frac{\pi}{2}, y) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 2) = 0$$

۶۷. هریک از مسائل زیر را حل کنید (به روش تفکیک متغیرها)

a) $\nabla^2 u = 0$; $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, $0 < z < \pi$

مقدار u به ازای $x=0$ و $x=\pi$ و $y=0$ و $y=\pi$ و $z=0$ و $z=\pi$ برابر صفر است و

$u(x, y, 0) = \sin x \sin^2 y$

b) $\nabla^2 u = 0$; $0 < x < \pi$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $0 < z < 1$

به ازای $x=0$ و $x=\pi$ و $y=0$ و $z=1$ داریم $u=0$

$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) = 2x - \pi$, $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0$

c) $\nabla^2 u = 0$; $r < 1$, $0 < z < \pi$

$u(r, \theta, 0) = u(r, \theta, \pi) = 0$, $u(1, \theta, z) = z(\pi - z) \cos^2 \theta$

d) $\nabla^2 u = 0$; $r < 1$, $0 < z < \pi$

$u(r, \theta, 0) = 0$, $u_z(r, \theta, \pi) = 0$, $u(1, \theta, z) = z \cos^2 \theta$

۶۸. هرگاه c دایره $z = e^{i\theta}$; $-\pi < \theta \leq \pi$ باشد آنگاه نشان دهید که

$$\int_c \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i$$

که در آن a عددی حقیقی و ثابت است. با نوشتن انتگرال فوق بر حسب θ نشان دهید که

$$\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = \pi$$

۶۹. فرض کنید که تابع $f(z) = u + iv$ در ناحیه بسته و کراندار D پیوسته و در داخل آن تحلیلی

و غیر ثابت باشد. آنگاه با به کار بردن اصل ماکزیمم با تابع $e^{f(z)}$ نشان دهید که تابع $u(x, y)$

مقدار ماکزیمم خود را روی کران D اختیار می کند.

۷۰. نشان دهید که (لم ژردان)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2R} ; R > 0$$

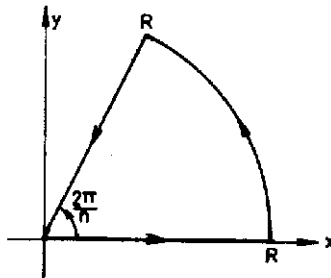
۷۱. نشان دهید که

$$a) \int_0^{\infty} \sin^n \theta d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \pi$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx = \frac{\pi}{2}$$

۷۲. با انتگرالگیری بر روی مرز زیر نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}$$



مراجع

1. *A first course in partial Differential Equations* , Hans F. Weinberger, XEROX college publishing , 1965.
2. *Advanced Engineering Mathematics*, Erwin kreyszing, sixth Edition, John wiley , 1988.
3. *Partial Differential Equations of Mathematical physics* , second Edition , Tyn Mint - U , North Holland , 1973.
4. *Advanced Calculus*, second Edition , wilfred kaplan, Addison-wesley publishing 1973.
5. *Mathematics for Engineering students*, P.D.S Verma, kalyani publisher, 1977.
6. *Higher Engineering Mathematics*, B.S. Grewal, kanahan publisher, 1983.
7. *Functions of complex variables*, philip Franklin, pitman, 1958.
8. *Introductory complex Analysis*, Richard A. silverman, prentice-Hall, Inc. , 1967.
9. *The theory of Functions of a complex variable*, George rankovsky, Mir publisher, 1971.
10. *problems in the theory of Functions of a complex variable*, Victor shiffer, Mir publisher, 1972.
11. *Complex Variables and Applications* , third Edition, Ruel V. cherchil, James W. Brown and Roger F. Verhey, Mc Graw-Hill, 1974.
12. *Elements of partial Differential Equations*, Ian sneddon, International student Edition, 1957.
13. *Introduction to partial Differential Equations with Applications* , E.C. Zachmanoglou and Dale W. Troe, the Williams and Wilkchgs co , 1976.

14. *Introduction to partial Differential Equations*, karl E. Gustafson, John Wily, 1980.
15. *partial Differential Equations*, E.T. copson, Cambridge Universitypress, 1976.
16. *patial Differential Equations*, P. Duchateau, D.W. zachmann, schaum's series , 1986.
17. *Advanced Engineering Mathematics*, M.D. Greenberg, prentice Hall International , Inc. , 1988.

جدولهای تبدیلات کسینوسی فوریه،
تبدیلات سینوسی فوریه و تبدیلات فوریه

جدول اول. تبدیلات کسینوسی فوریه

	$f(x)$	$\tilde{f}_c(w) = F_c(f)$
۱	$\begin{cases} 1; & 0 < x < a \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sin aw}{w}$
۲	$x^{a-1}; \quad 0 < a < 1$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \cos \frac{aw}{2}$
۳	$e^{-ax} \quad a > 0$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right)$
۴	$e^{-x^2/2};$	$e^{-w^2/2}$
۵	$e^{-ax^2}; \quad a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
۶	$x^n e^{-ax}$	$\sqrt{2\pi} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Re}(a+iw)^{n+1}$
۷	$\begin{cases} \cos x; & 0 < x < a \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} + \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
۸	$\cos ax^2; \quad a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right)$
۹	$\sin ax^2; \quad a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos \left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4} \right)$
۱۰	$\frac{\sin ax}{x}; \quad a > 0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} H(a-w)$
۱۱	$\frac{e^{-x} \sin x}{x};$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{arc tan} \frac{2}{w}$
۱۲	$J_0(ax) \quad a > 0$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{H(a-w)}{\sqrt{a^2-w^2}}$

جدول دوم. تبدیلات سینوسی فوریه

	$f(x)$	$\bar{f}_s(w) = F_s(f)$
۱	$\begin{cases} 1; & 0 < x < a \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right]$
۲	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{w}$
۳	$1/x^{\gamma/\gamma}$	$\gamma\sqrt{w}$
۴	$x^{a-1}; \quad 0 < a < 1$	$\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \sin \frac{a\pi}{\gamma}$
۵	$e^{-x}; \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \left(\frac{w}{1+w^{\gamma}} \right)$
۶	$\frac{e^{-ax}}{x}; \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \arctan \frac{w}{a}$
۷	$x^n e^{-ax}; \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{n!}{(a^{\gamma} + w^{\gamma})^{n+\gamma}} \text{Im}(a+iw)^{n+1}$
۸	$xe^{-x^{\gamma/\gamma}}$	$w e^{-w^{\gamma/\gamma}}$
۹	$xe^{-ax^{\gamma}}; \quad a > 0$	$\frac{w}{(\gamma a)^{\gamma/\gamma}} e^{-w^{\gamma/\gamma}}$
۱۰	$\begin{cases} \sin x; & 0 < x < a \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{\gamma\pi}} \left[\frac{\sin a(\gamma-w)}{\gamma-w} - \frac{\sin a(\gamma+w)}{\gamma+w} \right]$
۱۱	$\frac{\cos ax}{x}; \quad a > 0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} H(w-a)$
۱۲	$\arctan \frac{\gamma a}{x}; \quad a > 0$	$\sqrt{\gamma\pi} \frac{\sin h aw}{w} e^{-aw}$

جدول سوم. تبدیلات فوریه

	$f(x)$	$\tilde{f}(w) = F(f)$
۱	$\begin{cases} 1; & -b < x < b \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sin bw}{w}$
۲	$\begin{cases} 1; & b < x < c \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw \sqrt{2\pi}}$
۳	$\frac{1}{x^2 + a^2}; \quad a > 0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{-a w }}{a}$
۴	$\begin{cases} x; & 0 < x < b \\ 2x-a; & b < x < 2b \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ibw} - e^{2ibw}}{\sqrt{2\pi} w^2}$
۵	$\begin{cases} e^{-ax}; & x > 0 \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} (a+iw)}$
۶	$\begin{cases} e^{ax}; & b < x < c \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi} (a-iw)}$
۷	$\begin{cases} e^{iax}; & -b < x < b \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sin b(w-a)}{w-a}$
۸	$\begin{cases} e^{iax}; & b < x < c \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a-w}$
۹	$e^{-ax^2}; \quad a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
۱۰	$\frac{\sin ax}{x}; \quad a > 0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} w < a; \quad 0 \text{ if } w > a$

برخی مقادیر ثابت	مختصات قطبی
$e = 2.71828 \quad 18284 \quad 59.045 \quad 23526$ $\sqrt{e} = 1.64872 \quad 127.07 \quad 0.128 \quad 14685$ $e^2 = 7.38905 \quad 6.989 \quad 3.650 \quad 22723$ $\pi = 3.14159 \quad 26535 \quad 89793 \quad 23846$ $\pi^2 = 9.86960 \quad 44.010 \quad 89358 \quad 61883$ $\sqrt{\pi} = 1.77245 \quad 285.09 \quad 0.5516 \quad 0.2730$	$x = r \cos \theta \quad r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ $y = r \sin \theta \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$ $dx dy = r dr d\theta$
$\log_1 \pi = 0.49714 \quad 98726 \quad 94133 \quad 85435$ $\ln \pi = 1.14472 \quad 98858 \quad 494.0 \quad 17414$ $\log_1 e = 0.43429 \quad 44819 \quad 0.3251 \quad 82765$ $\ln 1.0 = 2.30258 \quad 50929 \quad 94.45 \quad 684.2$ $\sqrt{2} = 1.41421 \quad 35623 \quad 73.95 \quad 0.4880$ $\sqrt[3]{2} = 1.25992 \quad 10498 \quad 94873 \quad 16477$ $\sqrt{3} = 1.73205 \quad 08075 \quad 68877 \quad 29353$ $\sqrt[3]{3} = 1.44224 \quad 957.3 \quad 074.8 \quad 38232$ $\ln 2 = 0.69314 \quad 718.05 \quad 59925 \quad 3.942$ $\ln 3 = 1.09861 \quad 22886 \quad 681.09 \quad 69140$ $\gamma = 0.57721 \quad 56649 \quad 01522 \quad 86.61$ $\ln \gamma = -0.54953 \quad 93129 \quad 81644 \quad 82234$ (cf. p. 214)	<p style="text-align: center;">برخی سریهای مکلورن</p> $\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \quad (x < 1)$ $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$ $\ln(1-x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \quad (x < 1)$ $\arctan x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1} \quad (x < 1)$
$1^\circ = 0.01745 \quad 32925 \quad 19943 \quad 29577^{ad}$ $1^{rad} = 57.29577 \quad 95130 \quad 82320 \quad 8768.0$ $= 57^\circ 17' 44.806''$	
حروف یونانی	بردارها
α alpha β Beta γ, Γ Gamma δ, Δ Delta ϵ Epsilon ζ zeta η Eta $\theta, \vartheta, \Theta$ Theta ι Iota κ Kappa λ, Λ Lambda μ Mu	ν Nu ξ Xi \omicron omicron π pi ρ Rho σ, Σ sigma τ Tau υ, Υ Upsilon ϕ, φ, Φ phi χ Chi ψ, Ψ psi ω, Ω omega
	$a \cdot b = a_r b_r + a_\tau b_\tau + a_\gamma b_\gamma$ $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_r & a_\tau & a_\gamma \\ b_r & b_\tau & b_\gamma \end{vmatrix}$ $\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$ $\text{div } V = \nabla \cdot f = \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_\tau}{\partial y} + \frac{\partial v_\gamma}{\partial z}$ $\text{curl } V = \nabla \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & v_\tau & v_\gamma \end{vmatrix}$

برخی فرمولهای مشتگیری	برخی فرمولهای انتگرالگیری
$(cu)' = cu' \quad (c \text{ constant})$ $(u+v)' = u' + v'$ $(uv)' = u'v + v'u$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ (chain rule)}$	$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$ $\int \sin x dx = -\cos x + c$ $\int \cos x dx = \sin x + c$
$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \sec^2 x$ $(\cot x)' = -\csc^2 x$ $(\sinh x)' = \cosh x$ $(\cosh x)' = \sinh x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$ $\int \cot x dx = \ln \sin x + c$ $\int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x + c$ $\int \csc x dx = \ln \csc x - \cot x + c$ $\int \frac{dx}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c$ $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$ $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$ $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$ $\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + c$ $\int \ln x dx = x \ln x - x + c$ $\int e^{ax} \sin bx dx$ $= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c$ $\int e^{ax} \cos bx dx$ $= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c$

تبدیل‌های سیستم به یکدیگر

The most important systems of units are shown in the table below. The Mks System is also known as the International System of Units (abbreviated SI System), and the abbreviations *s* (instead of *sec*) and *N* (instead of *nt*) are also used.

System of units	Length	Mass	Time	Force
Cgs system	centimeter(cm)	gram(gm)	second(sec)	dyne
Mks system	meter(m)	kilogram(kg)	second(sec)	newton(nt)
Engineering system	foot (ft)	slug	second(sec)	pound(lb)

- $1 \text{ inch (in.)} = 2.54000 \text{ cm}$ $1 \text{ foot (ft)} = 12 \text{ in.} = 30.48006 \text{ cm}$
 $1 \text{ yard (yd)} = 3 \text{ ft} = 91.44018 \text{ cm}$ $1 \text{ statute mile(mi)} = 5280 \text{ ft} =$
 1.609335 km
 $1 \text{ nautical mile} = 6080.2 \text{ ft} = 1.8532 \text{ km}$
 $1 \text{ acre} = 4840 \text{ yd}^2 = 4046.773 \text{ m}^2$ $1 \text{ mi}^2 = 640 \text{ acres} = 2.58999 \text{ km}^2$
 $1 \text{ fluid ounce} = 29.5737 \text{ cm}^3$
 $1 \text{ U.S. gallon} = 4 \text{ quarts (liq)} = 8 \text{ pints (liq)} = 128 \text{ fl oz} = 3785.432 \text{ cm}^3$
 $1 \text{ British Imperial and Canadian gallon} = 1.20094 \text{ U.S. gallons} = 4546.1 \text{ cm}^3$
 $1 \text{ slug} = 14.59390 \text{ kg}$
 $1 \text{ pound (lb)} = 4.448444 \text{ nt}$ $1 \text{ newton (nt)} = 10^5 \text{ dynes}$
 $1 \text{ British thermal unit(Btu)} = 1054.8 \text{ joules}$ $1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergs}$
 $1 \text{ calorie (cal)} = 4.1840 \text{ joules}$
 $1 \text{ kilowatt-hour (kWh)} = 3413 \text{ Btu} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ joules}$
 $1 \text{ horsepower (hp)} = 2545 \text{ Btu/h} = 178.2 \text{ cal/sec} = 0.74570 \text{ kW}$
 $1 \text{ kilowatt (kW)} = 1000 \text{ watts} = 3413 \text{ Btu/h} = 238.9 \text{ cal/sec}$
 $^{\circ}\text{F} = ^{\circ}\text{C} \cdot 1.8 + 32$ $1' = 60'' = 3600'' = 0.01745 \text{ radian}$

for further details see e.g.D. Halliday and R.Resnick. Physics.3rd ed. New York: Wiley,1978. See also AN American National Standard. ASTM / IEEE Standard Metric Practice. Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 345 East 47th Street, New York, N.Y. 10017.

فهرست راهنما

تبدیل	استوانه‌های همیتانسیل ۱۰۹
خطی کسری ۱۷۳	اعداد مختلط ۱۴۹
دوخطی ۱۷۳	انتگرال روی خط در صفحه مختلط ۱۹۳
فوریه معکوس ۳۸	انتگرالهای
مویبوس ۱۷۳	فونل ۲۳۵
تعامد دنباله توابع ۲	فوریه ۱، ۲۷، ۲۹
تعمیم فرد ۹، ۹۸	انتگرالگیری از توابع مختلط ۱۹۳
توابع	انعکاس
تحلیلی ۱۵۶	آینه‌ای ۱۷۱
مختلط ۱۴۹، ۱۵۴	دایره‌ای ۱۷۱
مزدوج همساز ۱۶۰	اویلر
مقدمانی ۱۶۵	ضرایب ۳
همساز ۱۶۰	معادله ۱۱۷
تیلور ۲۱۰	برنولی ۲۴۸
جدول	بسل ۱۱۴، ۱۱۹
سینوسی فوریه ۲۶۵	بیضی گون ۷۰
فوریه ۲۶۶	پاراسوال ۵۱
کسینوسی فوریه ۲۶۴	پواسن ۱۰۸
چند جمله‌ای لژاندر ۱۱۲	پیمپش ۴۰
حل دالامبر معادله موج ۸۷	پیوستگی توابع مختلط ۱۵۵
خط شاخه‌ای ۱۸۱	پیوسته تکه‌ای ۱۲، ۶۵
دالامبر ۸۷	تابع
دیریکله ۱۴۴	بسل مرتبه صفرم ۱۱۵
ریمن - لیبگ ۱۳، ۱۷	خطی ۱۶۶
روش	۱۸۰ <i>Li2</i>
ضریب ۷۴	همانی ۱۶۵
تفکیک متغیرها ۷۴	تبدیلات
سری	فوریه ۱، ۳۶، ۳۸، ۱۲۰
سینوسی فوریه ۱۰	فوریه کسینوسی و سینوسی ۳۶، ۳۷
فوریه دوگانه ۲۴	فوریه کسینوسی و سینوسی معکوس ۳۶
فوریه متناظر ۹	کسری خاص ۱۷۴
کسینوسی فوریه ۱۰	لاپلاس ۱۲۰
مکلورن ۲۱۳	

لوران ۲۱۸	سریهای
لیپشیتز ۶۵	توانی ۲۱۰
لیوویل ۲۰۸	تیلور و لوران ۲۱۰
مانده توابع ۲۱۸	فوریه ۱
مختلط	سهمی گون ۷۰
توابع ۱۵۴	شاخه اصلی لگاریتمی ۱۸۰
اعداد ۱۴۹	صفحات همپتانسیل ۱۰۸
مدلسازی ۷۲	صفرهای تابع تحلیلی ۲۱۵
مسائل با مقادیر اولیه و کرانه‌ای ۷۲	صورت مختلط
مسئله ۷۰	انتگرال فوریه ۲۹
ارتعاش یک ناحیه مستدیر ۱۱۸	سری فوریه ۳۱
انتقال حرارت در یک میله با طول نامتناهی ۱۰۰	ضرایب اویلر ۲۹، ۳
گرما ۹۴	فونل ۲۳۶
لاپلاس برای یک کره ۱۱۵	فرمول مو آور ۱۵۱
موج ۷۴	قسمت اصلی بسط لوران ۲۲۲
معادلات	قضیه
با مشتقات جزئی ۶۹	اصل ماکزیمم ۲۰۷
ریاضی فیزیک ۶۹	اصلی جبر ۲۰۹
کشی ریمن ۱۵۶، ۱۵۸	انتگرال کشی ۱۹۷
معادله	تیلور ۲۱۱
اوایلر ۱۱۷	ریمن لیپگ ۱۷، ۱۳
بسل ۱۱۴، ۱۱۹	فرمول انتگرال کشی ۲۰۴
بیضی گون ۷۰	کشی ریمن ۱۵۶، ۱۵۷
پواسن ۷۰	گرین ۱۹۸
سهمی گون ۷۰	لوران ۲۱۶
شبه خطی ۶۹	لیوویل ۲۰۸
گرما ۹۴، ۷۰	مانده‌ها ۲۱۹
لاپلاس ۱۰۸، ۷۰	قطب
لاپلاس در مختصات کروی ۱۰۹	ساده ۲۲۲
لواندار ۱۱۲، ۱۱۷	مرتبه m ۲۲۲
موج ۷۰	کشی ریمن ۱۵۶، ۱۵۷
موج در فضای دو بعدی ۱۰۴	گرین ۱۹۸
هذلولی گون ۷۰	گستوش
هلمهولتز ۱۴۲، ۷۰	زوج ۹
مکلورن ۲۱۳	فرد ۹
مو آور ۱۵۱	لاپلاس ۱۰۸، ۷۰
نامساوی کشی ۲۰۹	لواندر ۱۱۲

نقطه

تکین ۲۲۱

تکین اساسی ۲۲۲

تکین برداشتنی ۲۲۲

شاخه‌ای ۱۸۱

منفرد ۲۲۱

نگاشت

همدیس ۱۶۵، ۱۵۴

$W=e^z$ ۱۷۶

$W=\sin z$ ۱۷۷

$W=\frac{1}{z}$ ۱۷۰

$W=z^z$ ۱۶۹

$W=z+b$ ۱۶۶

نواحی در صفحه مختلط ۱۵۳

هذلولی گون ۷۰

همپتانسیل

استوانه ۱۰۹

صفحه ۱۰۸

هموارتکدای ۳۰

منمهورتزر ۱۴۲، ۷۰

